

4.2 Chapitre 1: Applications de la dérivée aux problèmes d'optimisation

4.2.1 Analyse marginale

En économie, l'expression *analyse marginale* est une technique qui permet d'étudier l'effet que produit sur une fonction (coût, revenu, demande, production,...) un accroissement d'une unité de la variable indépendante.

Méthodologie

- Déterminer la fonction (coût, revenu, demande, production,...) à étudier
- Calculer la fonction marginale
- Evaluer la valeur de la fonction marginale au point indiqué

4.2.1.1 Exemple I : coût marginal

On estime que le coût de production total (en \$) de x chandails est :

$$C(x) = 500 + 3x + 40\sqrt{x}$$

dollars Si présentement on fabrique 100 chandails

- déterminer le coût total de cette production,
- déterminer ce qu'il en coûterait pour produire le 101^e chandail.

Solution

Évaluons d'abord le coût de production total de 100 chandails. Pour cela, il suffit de remplacer x par 100 dans l'équation du coût de production des chandails.

$$\begin{aligned} C(100) &= 500 + 3(100) + 40\sqrt{100} \\ &= 1200\$ \end{aligned}$$

On obtient le coût pour produire le 101^e chandail en effectuant la différence suivante:

$$\begin{aligned} C(101) - C(100) &= 500 + 3(101) + 40\sqrt{101} - (500 + 3(100) + 40\sqrt{100}) \\ &= 4,995\$ \end{aligned}$$

Le coût de production du 101^e chandail est donc 4,995\$.

Les économistes disposent d'une technique beaucoup plus rapide pour obtenir cette valeur ou du moins pour obtenir une approximation de cette valeur. Ils utilisent la dérivée.

$$\begin{aligned}
 C(101) - C(100) &= \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100} \\
 &\sim \lim_{x \rightarrow 100} \frac{C(x) - C(100)}{x - 100} \\
 &= C'(100) \\
 &= 3 + \frac{20}{\sqrt{100}} \\
 &= 5\$
 \end{aligned}$$

$C'(100)$ est appelé par les économistes le *coût marginal* pour une production de 100 chandails. Ce coût représente une bonne approximation de ce qu'il en coûterait pour augmenter d'une unité la production.

Graphiquement le coût réel pour produire le 101^e chandail correspond à la pente de la droite sécante passant par les points A et B.

$$\text{Le coût du 101^e chandail} = \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100}$$

Les économistes obtiennent une bonne approximation de ce coût en utilisant la pente de la tangente au point A

$$\text{Le coût du 101^e chandail} \sim C'(100)$$

La dérivée constitue un moyen rapide d'obtenir les coûts engendrés par la production du x^{e} chandail. Ainsi le coût du

$$201^{\text{e}} \text{ chandail} \sim C'(200) = 4,41\$$$

$$401^{\text{e}} \text{ chandail} \sim C'(400) = 4,00\$$$

$$1001^{\text{e}} \text{ chandail} \sim C'(1000) = 3,63\$$$

Le concept peut être appliqué à plusieurs autres types de fonctions.

- À la fonction «revenu» d'un produit, on parlera de revenu marginal.
- À la fonction «profit» d'un produit, on parlera du profit marginal.
- À la fonction «demande» d'un produit, on parlera de la demande marginale, etc.

4.2.1.2 Exemple 2 : profit marginal

Après étude, une petite entreprise fabriquant des chaises a déterminé qu'il lui en coûte

$$C(x) = 700 + 9x - \frac{x^2}{100} \text{ dollars}$$

pour fabriquer x chaises. Si le prix de vente est de 15 \$ la chaise,

- quels sont les profits de l'entreprise lorsqu'elle produit et vend 200 chaises ?*
- Si la compagnie décidait d'augmenter sa production d'une unité, déterminer à l'aide de l'analyse marginale, l'augmentation du profit de l'entreprise qu'il en résulterait.

Solution : profit = revenu - coût

rép: a) 900\$; b) 10\$

Dans l'exemple suivant, l'analyse marginale est utilisée pour évaluer l'effet sur la production d'un accroissement de la main-d'œuvre d'une unité.

4.2.1.3 Exemple 3 : production marginale

On estime que la production hebdomadaire d'une usine est

de

$$Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x \text{ unités}$$

où x est le nombre de travailleurs employés à l'usine. Présentement l'usine dispose de 30 employés. A l'aide de l'analyse marginale, calculer la variation de la production hebdomadaire résultant de l'embauche d'un travailleur supplémentaire.

Solution :

rép: 2100 unités

2.4.1. Taux liés

La dérivée est souvent utilisée pour calculer le taux de variation d'une variable reliée à une autre dont le taux de variation est connu. On parlera dans ce cas de taux liés

Méthodologie

- Représenter graphiquement le problème lorsque c'est possible de définir les variables nécessaires à sa solution.
- Indiquer le taux de variation cherché.
- Indiquer le taux de variation connu.
- Trouver une relation entre les variables.
- Dérivée implicitement par rapport à la variable indépendante.
- Calculer la quantité cherchée à l'aide des données du problème.

➤ Exemple

On lance un caillou dans un lac. Le caillou produit des ondes circulaires à partir de son point de chute. Le rayon du cercle ainsi formé s'accroît de 3 cm/s. Calculer le taux d'accroissement de l'aire du cercle par rapport au temps quand le rayon mesure 10cm.

Solution



- Désignons par
r : le rayon du cercle après t secondes,
A : l'aire du cercle après t seconde,
- On cherche $\frac{dA}{dt}$ quand r = 10cm.
- On sait que $\frac{dr}{dt} = 3 \text{ cm} / \text{s}$.
- L'aire est reliée au rayon par la relation $A = \pi r^2$.
- A et r sont deux fonctions de t, dérivons par rapport à t chaque membre de l'équation

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi * r * \frac{dr}{dt}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=10} &= 2\pi * 10 * 3 \text{ cm}^2 / \text{s} \\ &= 60\pi \text{ cm}^2 / \text{s} \\ &= 188,5 \text{ cm}^2 / \text{s} \end{aligned}$$

L'aire augmente donc à raison de $60\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ ou $188,50 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Chapitre 2 : Optimisation de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles

I. Optimisation libre d'une fonction d'une variable réelle

I.1 Vocabulaire

L'optimisation libre contraste avec l'optimisation sous contraintes que nous verrons dans la suite du cours.

Définition I.1. soit $f : Df \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable.

- x_0 est un point de maximum (resp. minimum) global pour f si pour tout $x \in Df$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $x \in Df$, $f(x) \geq f(x_0)$). $f(x_0)$ est alors le maximum (resp. minimum) global de f .
- x_0 est un point de maximum (resp. minimum) local pour f s'il existe un **voisinage** V de x_0 ($x_0 \in V \subset Df$) tel que x_0 soit un maximum (resp. minimum) global de la fonction f restreinte au domaine V .
- un **extremum** est un minimum ou un maximum.

Remarque I.1. Comme voisinage V de x_0 , on peut considérer l'intervalle $V =]x_0 - r, x_0 + r[$ avec r aussi petit que l'on veut.

Définition I.1. Si f est dérivable sur Df et si x_0 est à l'intérieur du domaine Df (pas sur le bord). x_0 est appelé **point stationnaire** si $f'(x_0) = 0$.

Proposition I.3. Si f est dérivable sur Df et si x_0 est un extremum local situé l'intérieur du domaine Df et si f' continue au voisinage de x_0 , alors x_0 est un point stationnaire.

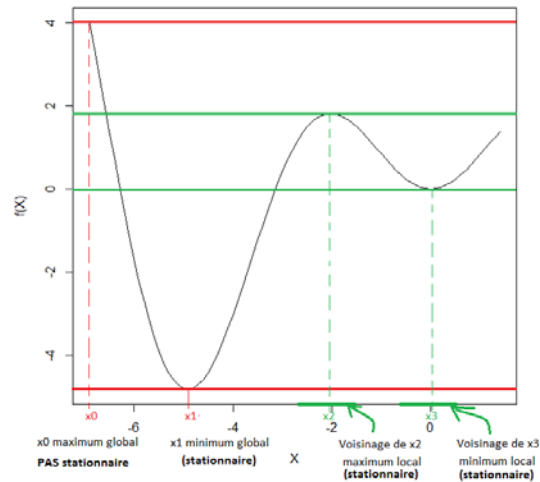


Figure 4: Illustration maximum minimum

Exemple 1 : Optimiser les fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2$

I. $f(x) = x^3(x^2 - 1)$

Solution

Optimiser les fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2$

- **Définir les différentes variables : x**
- **Ecrire l'objectif** : Optimiser la fonction $f(x) = x^2$
- **Recherche de points stationnaires** : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Le seul point stationnaire est $x = 0$.

- **Nature du point stationnaire : signe de $f''(x)$**

$$f''(x) = 2 > 0.$$

Donc le point $x = 0$ est un **minimum** pour f .

2. $f(x) = x^3(x^2 - 1)$

- **Définir les différentes variables : x**
- **Ecrire l'objectif :** Optimiser la fonction $f(x) = x^3(x^2 - 1)$
- **Recherche de points stationnaires :** $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Les points stationnaires sont $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

- **Nature des points stationnaires : signe de $f''(x)$**

$$f''(x) = 20x^3 - 6x = 2x(10x^2 - 3).$$

	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$		$x_2 = 0$		x_3	
					$+\sqrt{\frac{3}{10}}$	
$2x$	-	-	-	+	+	+
$10x^2 - 3$	+	+	-	-	+	+

$f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$	-	-	+	-	+	+
--------------------------	---	---	---	---	---	---

Le tableau de signe permet de conclure que :

- $f''(x_1) < 0$, donc le point $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ est un **maximum** pour f .
- $f''(x_2) = 0$, donc on ne peut rien conclure au point $x_2 = 0$ pour f .
- $f''(x_3) > 0$, donc le point $x_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$ est un **minimum** pour f .

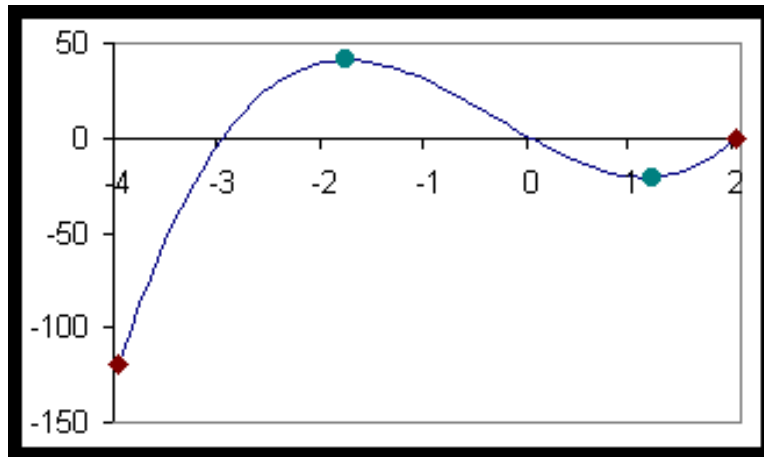
I.2 Optimisation entre des bornes d'une fonction d'une variable réelle

Théorème

Soit f , une fonction continue définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. Soient x_{min} , le point où f atteint son minimum absolu sur $[a, b]$, et x_{max} , le point où f atteint son maximum absolu sur $[a, b]$. Alors, x_{min} et x_{max} se trouveront toujours à l'un ou l'autre des points suivants :

- point stationnaire ;
- point de borne.

Le graphique suivant illustre le sens du théorème. La fonction décrite est bornée par l'intervalle $[-4, 2]$. Elle possède deux optima locaux (*en vert*) : un maximum local en $x = -1,8$ ainsi qu'un minimum local en $x = 1,1$. Remarquez que le maximum local en $x = -1,8$ constitue également le maximum absolu, étant le point le plus haut de la fonction de f sur $[-4, 2]$. Toutefois, le minimum absolu de f sur $[-4, 2]$ ne se trouve pas en $x = 1,2$ mais plutôt au point de borne gauche, $x = -4$.



Le théorème restreint les optima possibles aux points stationnaires, et aux bornes. Contrairement au problème sans contraintes, il n'y a pas lieu de déterminer la nature de tous les points stationnaires. L'étude se limite à comparer la hauteur de la fonction en ces points à la hauteur de la fonction aux bornes. Il suffira d'identifier parmi ces valeurs celles qui sont optimales.

Méthodologie *Optimisation entre deux bornes* $[a, b]$

- Effectuer la dérivée première ;
- Trouver tous les points stationnaires de $[a, b]$;
- Évaluer $f(x)$ aux points stationnaires et aux bornes ;
- Identifier le minimum et le maximum absolus sur $[a, b]$.

Exemple 2

Trouver le minimum et le maximum absolus de la fonction

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 9 \text{ sur l'intervalle } [0, 3].$$

- *Effectuer la dérivée première ;*

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Trouver tous les points stationnaires de $[0, 3]$;

On retrouve les points stationnaires lorsque

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \{-2, 2\}.$$

Or, puisque les bornes nous contraignent à l'intervalle $[0, 3]$, seul le point stationnaire $x = 2$ est retenu. La fonction ne possède aucun point critique puisque la dérivée est définie en tout point de $[0, 3]$.

- *Évaluer la fonction f aux points stationnaires et aux bornes ;*

Point stationnaire $x = 2 : f(2) = -7$

Borne gauche $x = 0 : f(0) = 9$

Borne droite $x = 3 : f(3) = 0$

- *Identifier le minimum et le maximum absolus sur $[0, 3]$.*

Maximum absolu $f(0) = 9$

Minimum absolu $f(2) = -7$

I.3. Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux

variable : Méthode de substitution

Considérons une fonction de deux variables $f(x, y)$. On souhaite trouver les extremums de f sous la contrainte $y = g(x)$. Exemple : Maximiser $f(x, y)$ sous la contrainte $y = g(x)$, c'est à dire, trouver

$$\max \{f(x, y) \mid (x, y) \in Df \text{ et } y = g(x)\}.$$

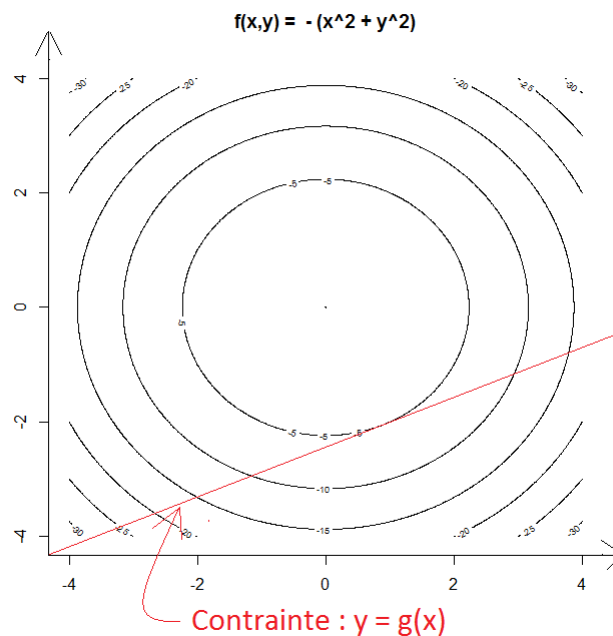


Figure 5: Optimisation sous contrainte

La méthode de substitution consiste simplement à trouver les extremums de la fonction d'une variable : $\hat{f}(x) = f(x, g(x))$

Exemple 3: Optimiser sous les contraintes indiquées les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sous la contrainte : $x + y = 1$
2. $f(x, y) = xy$, sous la contrainte : $x - y = 1$

Solution

1. Optimisons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, sous la contrainte : $x + y = 1$

➤ **Définir les différentes variables** : x, y

➤ **Ecrire l'objectif** : Optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$

➤ **Ecrire toutes les contraintes**

▪ **Contrainte** : $x + y = 1$

➤ **Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en fonction d'une seule** (par exemple y en fonction de x)

▪ En utilisant la contrainte $x + y = 1$ on obtient $y = 1 - x$

➤ **Substituer ces expressions dans la fonction «objectif»**

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= f(x, g(x)) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 \\ &= 2x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

➤ **Optimiser**

Nous avons une fonction à une seule variable que l'on peut optimiser en faisant recours aux méthodes utilisées précédemment dans le cas des fonctions d'une seule variable.

▪ Recherche de points stationnaires de la fonction

$$g(x) = f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Le seul point stationnaire est $x = \frac{1}{2}$.

• Nature du point stationnaire : signe de $g''(x)$

$$g''(x) = 4 > 0.$$

Donc le point $x = \frac{1}{2}$ est un **minimum** pour g .

La valeur correspondante de y est obtenue de la relation

$$y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Par suite, la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est minimisée lorsque $x = y = \frac{1}{2}$

sous la contrainte : $x + y = 1$.

Remarque : La résolution par la méthode de substitution demeure un moyen très efficace même dans des problèmes ayant plus de deux variables.

I.4. Convexité et caractérisation des extremums

Définition I.4 (Convexité) Si f est deux fois dérivable sur son domaine de définition Df .

- On dit que f est convexe (resp. concave) si $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$).
- On dit que f est localement convexe (resp. localement concave) autour d'un point x_0 situé l'intérieur de Df s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$) pour tout $x \in V$.

Remarque I.1. Si $f'' > 0$ on dit que f est strictement convexe.

Proposition I.II. f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I ssi

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

(resp. $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$) pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Remarque I.3. Cette caractérisation de la convexité est généralement prise comme définition.

Exemple : Reprendre les fonctions de la partie I.1 et discuter leur convexité.

Proposition I.6.

1. f convexe ssi $-f$ concave.
2. Une somme de fonctions convexes est convexe.
3. Un produit de fonctions convexes n'est en général **pas** convexe. (contre

exemple $x^3 = x * x^2$)

Proposition I.7. Soit f une fonction deux fois dérivable telle que f'' soit continue. Soit x_0 un point stationnaire de f :

1. si $f''(x_0) > 0$ alors x_0 point de minimum local.
2. si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 point de maximum local.
3. si $f''(x_0) = 0$ alors on ne peut pas conclure.

Proposition I.8. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I . Si f est convexe (resp. concave) alors x_0 est un point de minimum global (resp. maximum global).

Exemple 4 : Étudier la convexité des fonctions des **Exemple 1** et **Exemple 2** puis conclure sur le caractère **global** ou **local** des extréma obtenus.

II. Optimisation libre des fonctions de deux variables

Dans ce chapitre nous voulons caractériser les extremums locaux et globaux des fonctions de deux variables. Contrairement aux fonctions d'une variable nous ne possédons pas d'outil tel que le tableau de variation pour analyser les fonctions de deux variables. Cependant les notions de points stationnaires et de convexité locale ou globale sont encore exploitables. La définition des extremums locaux et globaux pour une fonction de deux variable est commune à celle pour les fonctions d'une variable : Définition I.1. Pour les fonctions de deux variables, les voisinages d'un point $P_0 = (x_0, y_0)$ peuvent être assimilés à des disques de centre P_0 et de rayon aussi petit qu'on veut.

II.1. Condition du premier ordre

Définition II.1. Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées

partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenant à l'intérieur

de D (pas sur les bords) est appelé *point stationnaire* si $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$.

Proposition II.2 (Condition nécessaire du premier ordre). *Si f possède des dérivées partielles continues dans un voisinage d'un point $P_0 = (x_0, y_0)$ situé à l'intérieur de son domaine de définition et si P_0 est un extremum local de f alors P_0 est un point stationnaire*

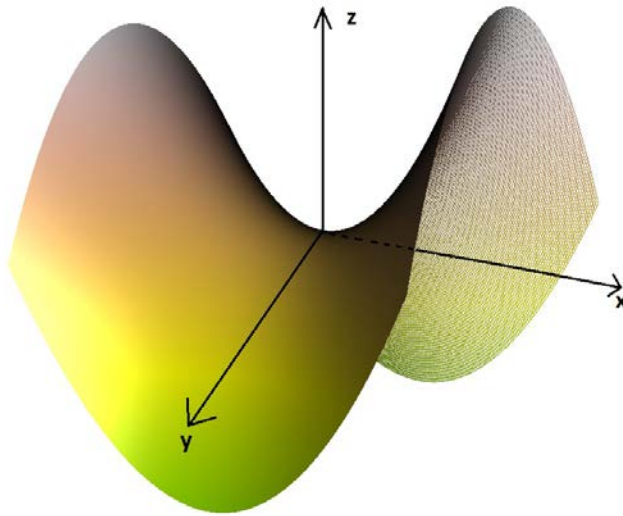


Figure 6: Représentation de $f(x, y) = x^2 - y^2$: Selle de cheval

Autrement dit les extrema locaux sont à chercher parmi les points stationnaires.

II.2. Conditions du second ordre et convexité

Comme pour les fonctions de deux variables, une fois les points stationnaires trouvés nous aimerions savoir qui parmi ces points est un extremum local ou global.

Proposition II.3 (Caractérisation des points stationnaires - Condition suffisante du second ordre).

Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$

situé à l'intérieur de son domaine de définition. Posons $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$,

$$s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ et } t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

1. Si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 > 0$ alors $P_0 = (x_0, y_0)$ est un minimum local
2. Si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$ alors $P_0 = (x_0, y_0)$ est un maximum local
3. Si $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ alors $P_0 = (x_0, y_0)$ n'est ni un maximum ni un minimum local.
(On dit que $P_0 = (x_0, y_0)$ est un point selle ou un point col)
4. Sinon on ne peut rien dire

Définition II.4 (Convexité). Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie convexe $D \subset \mathbb{R}^2$ et possédant des dérivées partielles du second ordre. On dit que f est convexe si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0.$$

On dit que f est concave si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0.$$

Remarque II.1 (Admise). Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre. f est convexe (resp. concave) ssi

$$f(tP + (1-t)Q) \leq tf(P) + (1-t)f(Q)$$

(resp. $f(tP+(1-t)Q) \geq tf(P)+(1-t)f(Q)$) pour tout $P, Q \in Df$ et tout $t \in [0,1]$.

Cette caractérisation de la convexité est généralement prise comme définition.

Proposition II.5 (Conditions d'existence d'extremums globaux). Si f est convexe (resp. concave) et admet un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$ alors $P_0 = (x_0, y_0)$ est un minimum global (resp. maximum global).

Remarque II.I. Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$ situé à l'intérieur de son domaine de définition. Posons

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ et } t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

1. Si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 > 0$ alors f est **convexe** au voisinage de $P_0 = (x_0, y_0)$
2. Si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$ alors f est **concave** au voisinage de $P_0 = (x_0, y_0)$
3. Si $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ alors f n'est **ni convexe ni concave** au voisinage de $P_0 = (x_0, y_0)$.
4. Sinon on ne peut rien dire

Exemple 5 : Optimiser les fonctions de deux variables suivantes

- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - y$ ($Df = \mathbb{R}^2$)

1. Recherche de points stationnaires : résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Un seul point stationnaire : $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3 \end{cases}$$

3. Le point $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ est-il un extremum local ?

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2, \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2, \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 3$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = -5 < 0$$

Donc $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ est un point selle.

4. $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ étant un point selle, pas besoin de vérifier si f convexe ou

concave : $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ n'est pas un extremum local donc *a fortiori* pas un

extremum global

- $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 y^2 - y^2 \quad (Df = \mathbb{R}^2)$

1. Recherche de points stationnaires : résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2xy^2 = 0 \\ 4y^3 - 2x^2y - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ \text{ou} \\ x^2 = \frac{1}{3} \text{ et } y^2 = \frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ x = 0 \text{ et } y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sept points stationnaires : $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

$P_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $P_4 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $P_5 = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $P_6 = \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2x^2 - 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4xy \end{cases}$$

3. Critère du second ordre (local) pour chaque point critique

- Pour $P_0 = (0, 0)$:

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 0, \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = -2, \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 0$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$$

Donc on ne peut rien dire pour $P_0 = (0, 0)$.

- Pour $P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$:

$$r_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = \frac{8}{3}, \quad t_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = \frac{16}{3}, \quad s_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{32}{3} > 0 \quad \text{et} \quad r_1 > 0$$

Donc $P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ est un minimum local.

- Pour $P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$:

$$r_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = \frac{8}{3}, \quad t_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_2) = \frac{16}{3}, \quad s_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$r_2 t_2 - s_2^2 = \frac{32}{3} > 0 \quad \text{et} \quad r_2 > 0$$

Donc $P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ est un **minimum local**.

- Pour $P_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$:

$$r_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = \frac{8}{3}, \quad t_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_3) = \frac{16}{3}, \quad s_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_3) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$r_3 t_3 - s_3^2 = \frac{32}{3} > 0 \quad \text{et} \quad r_3 > 0$$

Donc $P_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ est un **minimum local**.

- Pour $P_4 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$:

$$r_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) = \frac{8}{3}, \quad t_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_4) = \frac{16}{3}, \quad s_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_4) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$r_4 t_4 - s_4^2 = \frac{32}{3} > 0 \quad \text{et} \quad r_4 > 0$$

Donc $P_4 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ est un **minimum local**.

• Pour $P_5 = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$:

$$r_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_5) = -1, \quad t_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_5) = 4, \quad s_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_5) = 0$$

$$r_5 t_5 - s_5^2 = -4 < 0$$

Donc $P_5 = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ est un point selle.

• Pour $P_6 = \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$:

$$r_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_6) = -1, \quad t_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_6) = 4, \quad s_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_6) = 0$$

$$r_6 t_6 - s_6^2 = -4 < 0$$

Donc $P_6 = \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ est un point selle.

P_5 et P_6 étant des points selle, f ne peut être **ni convexe ni concave** (pas besoin de vérifier).

• $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (Df = \mathbb{R}^2)$

1. Recherche de points stationnaires : résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Un seul point stationnaire : $P_0 = (0, 0)$.

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Le point $P_0 = (0,0)$ est-il un extremum local ?

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2, \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2, \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 0$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 4 \quad \text{et} \quad r_0 > 0$$

Donc $P_0 = (0,0)$ est un **minimum local**.

4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right]^2 = 4 \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \geq 0$$

Donc f est **convexe** et $P_0 = (0,0)$ est un **minimum global**.

Chapitre 3 : Optimisation sous contrainte d'égalité : la méthode du Lagrangien

Nous avons vu dans le chapitre [précédent](#) la méthode de substitution permettant d'optimiser une fonction de deux variables $f(x, y)$ sous une contrainte du type : $y = g(x)$ ou $x = g(y)$ c'est dire lorsque la contrainte permet d'exprimer une variable en fonction d'une autre. La méthode du Lagrangien décrite dans ce chapitre est plus générale : elle permet de traiter le cas où la contrainte s'écrit : $g(x, y) = 0$. Par exemple trouver :

$$\max \{ f(x, y) \mid (x, y) \in Df \text{ et } g(x, y) = 0 \}.$$

I. Condition nécessaire du premier ordre

Définition 3.1 (Extremum local sous contrainte). Soient f et g deux fonctions de deux variables soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point appartenant à Df et Dg vérifiant $g(x_0, y_0) = 0$. $P_0 = (x_0, y_0)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f sur $D = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ s'il existe un voisinage V de $P_0 = (x_0, y_0)$ tel que pour tout $(x, y) \in V$ vérifiant $g(x, y) = 0$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

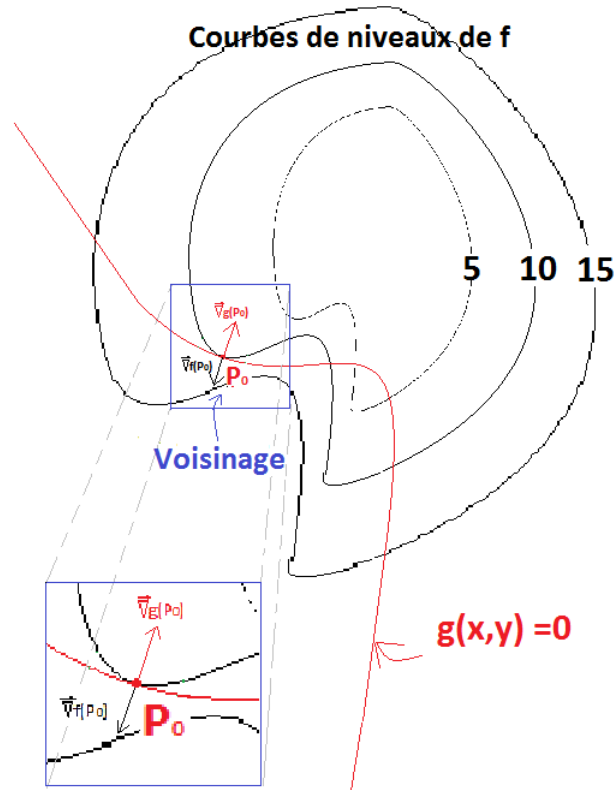
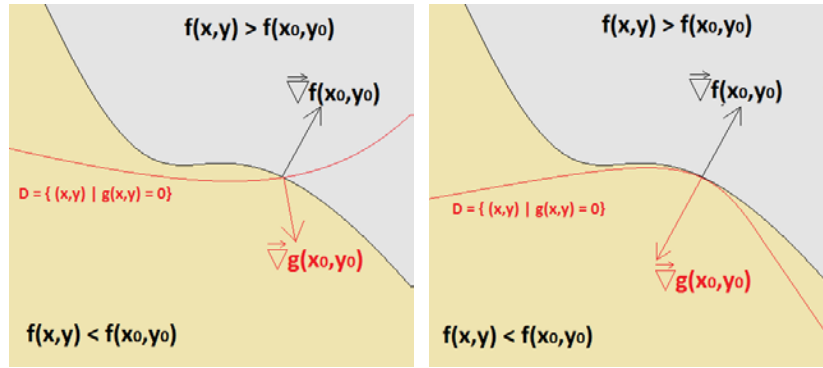


Figure 8: P_0 est un minimum local de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$

Théorème 3.2 (Condition nécessaire du premier ordre). Soient f et g deux fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles. $P_0 = (x_0, y_0)$ un point intérieur à Df et Dg . Si $P_0 = (x_0, y_0)$ est un point d'extremum local de f sur $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ et que $\vec{\nabla} g(P_0) \neq \vec{0}$ alors il existe un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{\nabla} f(P_0) = \lambda_0 \vec{\nabla} g(P_0)$.

$P_0 = (x_0, y_0)$ est appelé point stationnaire de f sur $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ et λ_0 est appelé multiplicateur de Lagrange associé.



Si les gradients ne sont pas alignés P_0 ne peut être un extremum local sur D

(a) Si P_0 est un extremum local sur D alors les gradients sont nécessairement alignés

Figure 9: Preuve graphique du théorème 3.2

Ce théorème nous permet de mettre en place la méthode dite du Lagrangien pour trouver les points stationnaires du problème d'optimisation sous contrainte, candidats pour être des extréma locaux (ou globaux) sous contrainte. Définissons la fonction de trois variables :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Proposition 3.3 (Méthode du Lagrangien). $P_0 = (x_0, y_0)$ est un point stationnaire sur $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ associé au multiplicateur de Lagrange λ_0 ssi (x_0, y_0, λ_0) vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Cette proposition est une conséquence directe du Théorème 3.2

II. Caractérisation faible des extrema locaux sous contrainte

- Condition suffisante du second ordre

Proposition 3.4 (Caractérisation **faible** des points stationnaires sous contrainte - Condition suffisante du second ordre). Soient f et g deux fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles continues au voisinage d'un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$ sous la contrainte $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ associé au multiplicateur de Lagrange λ_0 . Posons la fonction de deux variables $L_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$.

1. si $P_0 = (x_0, y_0)$ est un minimum local libre de L_0 alors P_0 est un minimum local sur D de la fonction f
2. si $P_0 = (x_0, y_0)$ est un maximum local libre de L_0 alors P_0 est un maximum local sur D de la fonction f
3. sinon on ne peut rien dire...

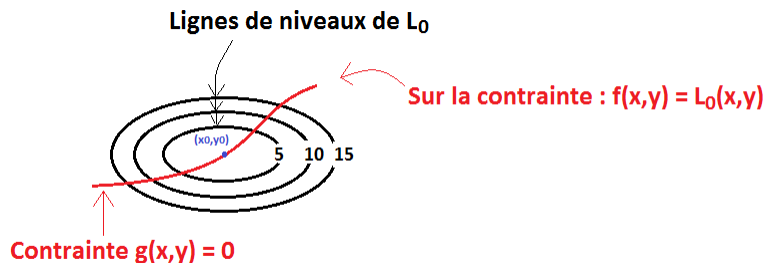


Figure 10: Démonstration graphique de la proposition 3.4. (x_0, y_0) minimum local de L_0 et donc aussi minimum locale de f sous contrainte

III. Extrema globaux sous contrainte d'égalité

Dans cette section sont regroupés quelques résultats permettant de conclure à l'existence d'extrema globaux sous contrainte.

Proposition 3.5 (Condition suffisante d'extremums globaux pour les contraintes affines).

Si g est une fonction affine : $g(x, y) = ax + by + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), si f est une fonction convexe (resp. concave) et si $P_0 = (x_0, y_0)$ est un point stationnaire de f sur $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ alors $P_0 = (x_0, y_0)$ est un point de minimum global (resp. maximum global) de f sur D .

Théorème 3.6 (Weierstrass). Toute fonction f continue sur un ensemble K fermé et borné (qui contient ses bords) possède un maximum global et un minimum global.

Exemple : Le cercle $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ est fermé et borné. Donc toute fonction f définie et continue sur ce domaine possède un maximum et un minimum global sur D .

Le théorème de Weierstrass permet d'affirmer lorsque f est continue et que D est fermé et borné que parmi les points stationnaires sur D se trouvent au moins un minimum et un maximum global sur D .

Proposition 3.7 (Condition suffisante sur le Lagrangien pour qu'un point stationnaire soit un extremum global.). Soient f et g deux fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre. Considérons la contrainte $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ et $P_0 = (x_0, y_0)$ un point stationnaire sous contrainte associé au multiplicateur de Lagrange λ_0 .

Posons la fonction de deux variables $L_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$ définie sur une partie convexe $D_0 \subset \mathbb{R}^2$. Alors:

1. si $P_0 = (x_0, y_0)$ est un minimum global libre de L_0 sur $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ (si L_0 convexe) alors P_0 est un minimum global sur D de la fonction f
2. si $P_0 = (x_0, y_0)$ est un maximum global libre de L_0 sur $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ (si L_0 concave) alors P_0 est un maximum global sur D de la fonction f .

Exemples

- Optimiser la fonction $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ (

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

1. Domaines de définition : $Df = \mathbb{R}^2$ et $Dg = \mathbb{R}^2$

2. Lagrangien : $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm \frac{1}{2} \\ y = 2\lambda x \\ x^2 = y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement les quatre points stationnaires sur D sont :

- $P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ associé au multiplicateur de

$$\text{Lagrange } \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

- $P_2 = (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ associé au multiplicateur de

$$\text{Lagrange } \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

- $P_3 = (x_3, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ associé au multiplicateur de

$$\text{Lagrange } \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

- $P_4 = (x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ associé au multiplicateur de

$$\text{Lagrange } \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

3. Par le Théorème de Weierstrass, f possède parmi ces points stationnaires au moins un point de minimum global sur D et un point de maximum global. Il suffit d'évaluer f en ces points stationnaires :

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$

f possède donc deux points de maxima globaux sur $D : (x_1, y_1)$ et (x_2, y_2) et deux points de minima globaux sur $D : (x_3, y_3)$ et (x_4, y_4)

- Optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$ (

$$g(x, y) = xy - 1$$

1. Domaines de définition : $Df = \mathbb{R}^2$ et $Dg = \mathbb{R}^2$

2. Lagrangien : $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = \frac{1}{x} \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Finalement les deux points stationnaires sur D sont :

- $P_1 = (x_1, y_1) = (1, 1)$ associé au multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 = 2$,
- $P_2 = (x_2, y_2) = (-1, -1)$ associé au multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 = 2$,

3. On ne peut pas appliquer le Théorème de Weierstrass car le domaine $D = \{(x, y) : xy - 1 = 0\}$ n'est pas borné.

4. $g(x, y) = xy - 1$ n'est pas linéaire

5. Voyons si on peut exploiter les conditions suffisantes du second ordre : posons

$$\begin{aligned} L_0(x, y) &= f(x, y) - 2g(x, y) \\ &= x^2 + y^2 - 2xy + 2 \end{aligned}$$

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2$$

Donc $r(x, y)t(x, y) - s^2(x, y) = 0$ pour les points stationnaires

$(x, y) = (1, 1)$ et $(x, y) = (-1, -1)$. On ne peut pas conclure

dommage ... Sur la figure 11 on voit bien que nos deux points stationnaires sont des minimums sous contrainte....

On peut cependant appliquer le critère global. L_0 est défini sur \mathbb{R}^2 qui est convexe et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$r(x, y)t(x, y) - s^2(x, y) = 0 \geq 0 \quad \text{et} \quad r(x, y) = 2 \geq 0,$$

L_0 est donc convexe, donc, par la proposition 2.5, les deux points stationnaires sont des minimums globaux libres de L_0 et, par la proposition 3.7, sont donc des minimums globaux sous contrainte de f .

Chapitre 4 : Modèles de Recherche Opérationnelle (RO)

2. Programmation linéaire

a. Modélisation

Programmation linéaire (PL)

- Problème classique de planification : affecter des *ressources limitées* à plusieurs *activités concurrentes*
- Programme = Plan (solution de ce problème)
- Programmation mathématique (RO) \neq Programmation informatique
- Fonction linéaire: fonction dans laquelle chaque variable évolue linéairement

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

- Modèle de PL = Modèle de programmation mathématique dans lequel toutes les fonctions sont linéaires

Exemple d'un modèle de PL

- Données du problème (*WyndorGlass*)
 - Deux types de produits (produit 1, produit 2)
 - Trois usines (usine 1, usine 2, usine 3)
 - Capacité de production pour chaque usine (par semaine)
 - Profit par lot (20 unités) de chaque produit

	Produit 1 (tps de production, h/lot)	Produit 2 (tps de production, h/lot)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit(\$)/lot	3000	5000	

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Chaque lot du produit 1 (2) est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3 (2 et 3)
- Énoncé du problème: Déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots/semaine) de façon à maximiser le profit total
- Variables de décision:
 - x_1 = nombre de lots du produit 1
 - x_2 = nombre de lots du produit 2
- Fonction objectif:
 - Z = profit total
 - $Z = 3x_1 + 5x_2$ (profit total en milliers de \$)
 - Maximiser Z

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Contraintes de capacité de production
 - $x_1 \leq 4$ (usine 1)
 - $2x_2 \leq 12$ (usine 2)
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (usine 3)
- Contraintes de non négativité
 - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (nombre d'unités produites ≥ 0)

Exemple d'un modèle de PL (suite)

- Maximiser $Z = 3x_1 + 5x_2$

sous les contraintes:

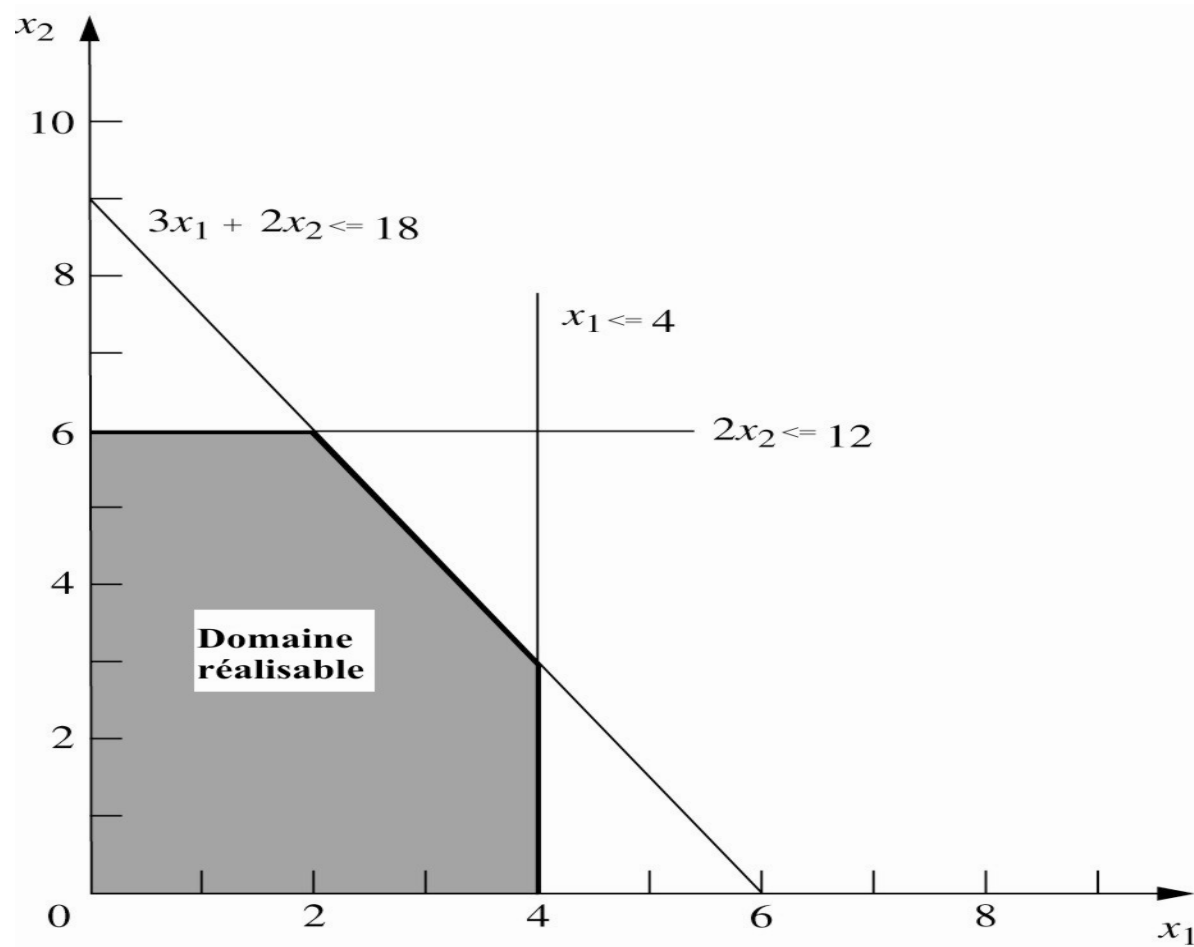
$$x_1 \leq 4 \quad (\text{usine 1})$$

$$2x_2 \leq 12 \quad (\text{usine 2})$$

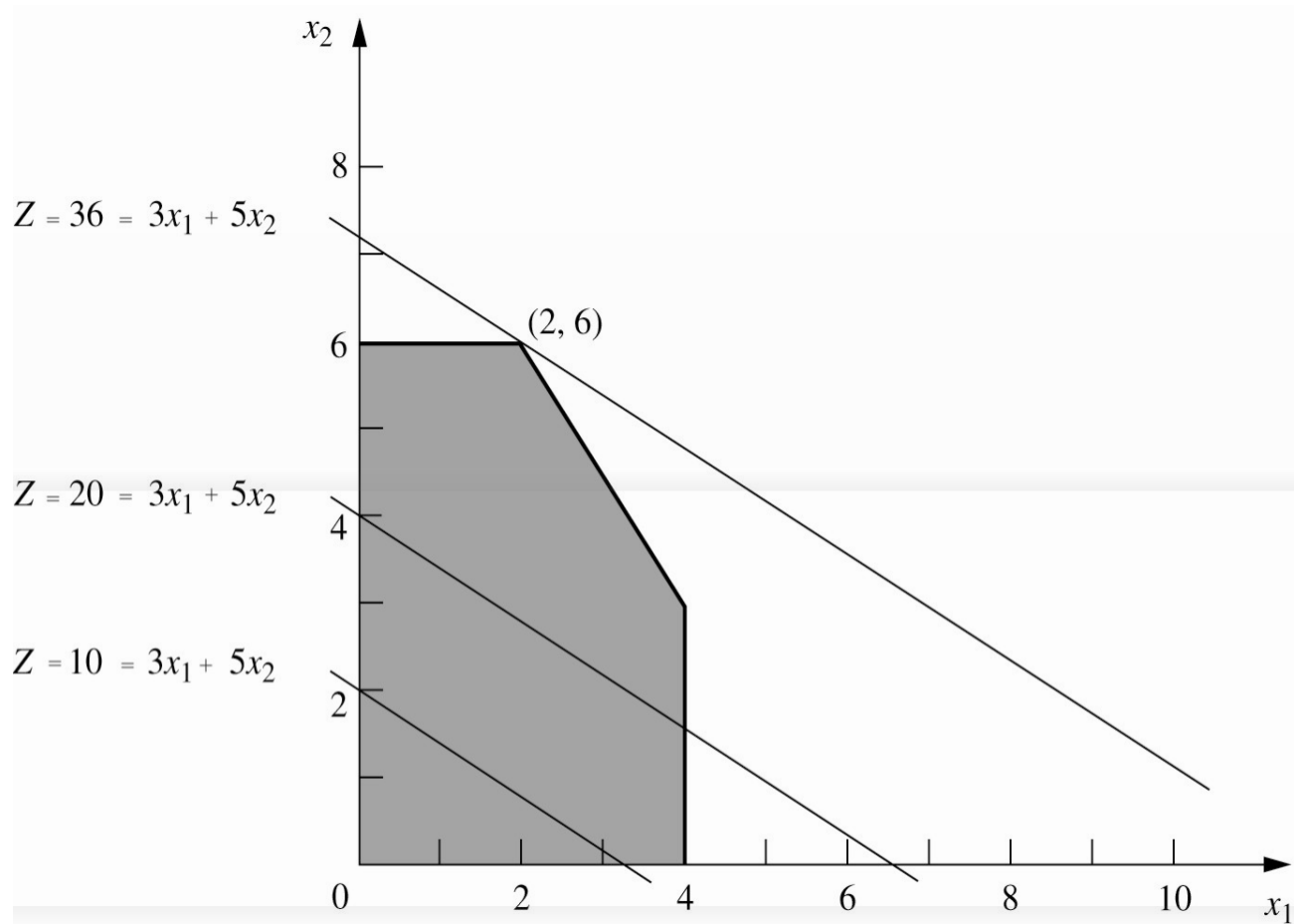
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (\text{usine 3})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{contraintes de non négativité})$$

Résolution graphique



Résolution graphique (suite)



Méthode graphique

- Tracer les droites correspondant aux contraintes
- Déterminer le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte
- Tracer les droites correspondant à la variation de l'objectif
 - Dans l'exemple:
$$Z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -(3/5)x_1 + (1/5)Z$$
 - Ordonnée à l'origine (dépend de la valeur de Z): $(1/5)Z$
 - Pente: $-3/5$
 - Maximiser: augmenter Z

Méthode graphique (suite)

- Uniquement pour les modèles à deux variables
- Plus de deux variables: méthode du simplexe
- Logiciels proposant la méthode du simplexe:
 - Excel Solver

- Problème *Wyndor Glass* avec Excel Solver

Excel Solver: conseils d'utilisation

- Entrer d'abord les données
- Les identifier clairement avec des noms d'intervalles
- Entrer chaque donnée dans une seule cellule (ne pas répéter la même donnée dans plusieurs formules)
- Utiliser des couleurs et des bordures pour distinguer les différents types de cellules:
 - Cellules données
 - Cellules variables
 - Cellules résultats
 - Cellule cible (objectif)

Modèle général de PL

- m ressources (3 usines)
- n activités (2 produits)
- Niveau de l'activité j (taux de production du produit j): x_j
- Mesure de performance globale (profit total): Z
- Accroissement de Z résultant de l'augmentation d'une unité du niveau de l'activité j : c_j
- Quantité disponible de la ressource i : b_i
- Quantité de ressource i consommée par l'activité j : a_{ij}

Modèle général de PL (suite)

- Objectif

$$\text{Maximiser } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

- Contraintes fonctionnelles

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

- Contraintes de non négativité

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

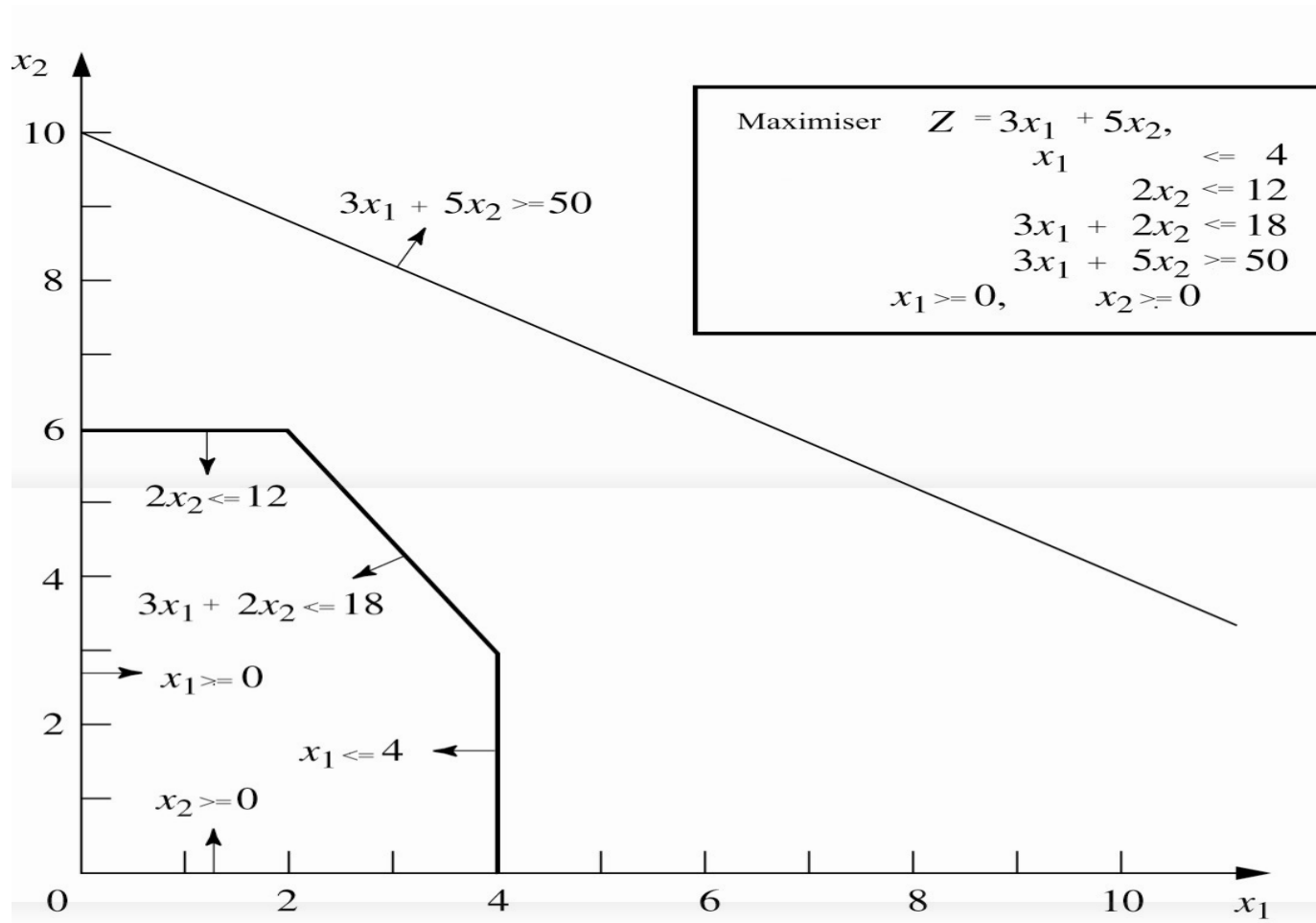
Modèle général de PL (suite)

- On appelle ce modèle *forme standard*
- D'autres formes sont possibles et définissent aussi des modèles de PL
 - Minimiser au lieu de Maximiser: $\min f(x) = - \max - f(x)$
 - $\geq, =$ dans certaines contraintes fonctionnelles au lieu de \leq
 - Certaines variables peuvent ne pas être forcées à être ≥ 0
 - $x \geq -4 \Leftrightarrow x+4 \geq 0$
définir $y = x+4, \quad y \geq 0$
 - $-10 \leq x \leq -2 \Leftrightarrow 0 \leq x+10 \leq 8$
définir $y = x+10, \quad y \geq 0$

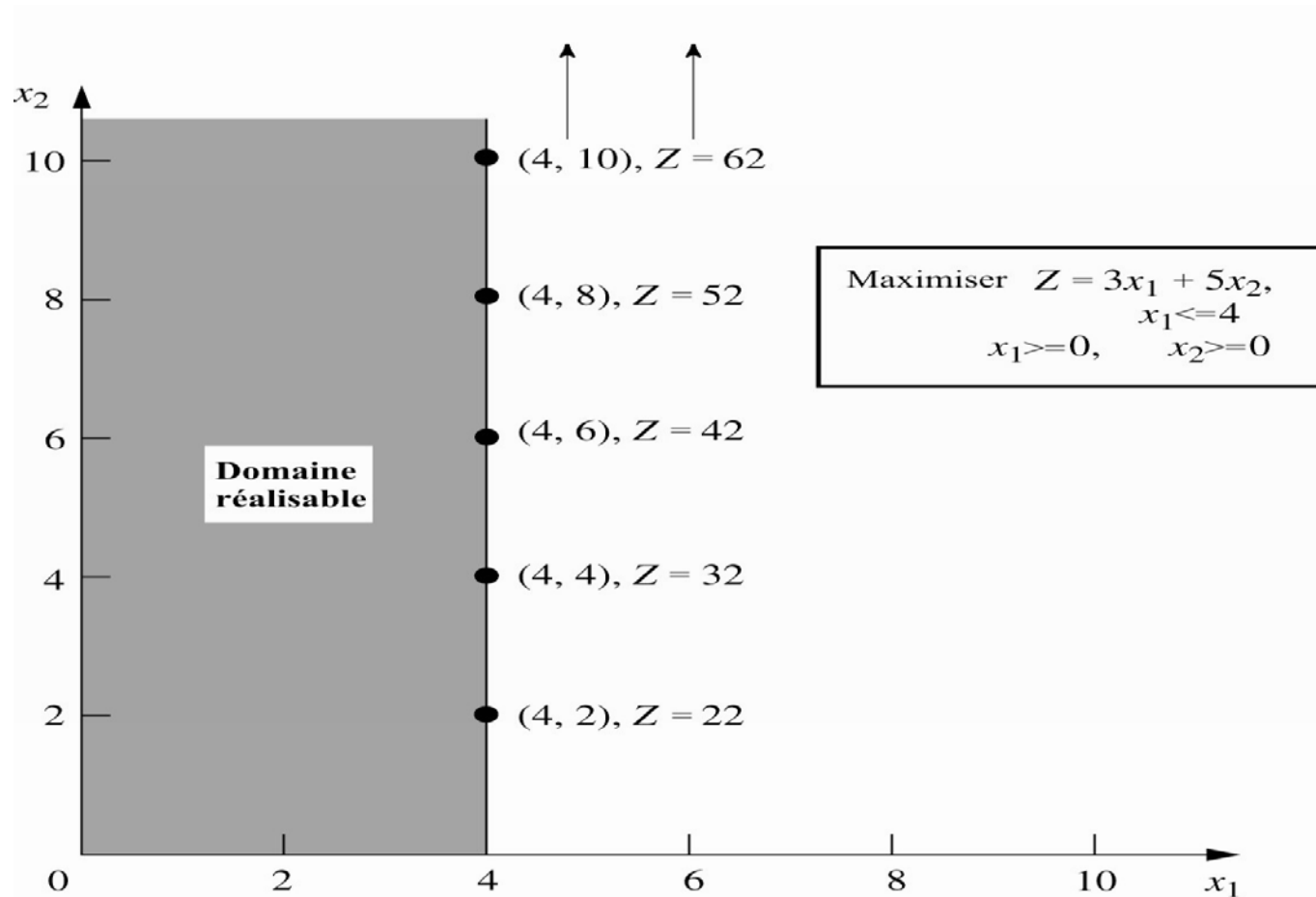
Terminologie de base en PL

- *Solution réalisable*: solution pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites: \in domaine réalisable
- *Solution non réalisable*: solution pour laquelle au moins une contrainte est violée: \notin domaine réalisable
- *Solution optimale*: solution ayant la meilleure valeur possible de l'objectif
- Modèle n'ayant *aucune solution optimale*:
 - Domaine réalisable vide
 - Objectif non borné
- Modèle ayant une *infinité de solutions optimales*

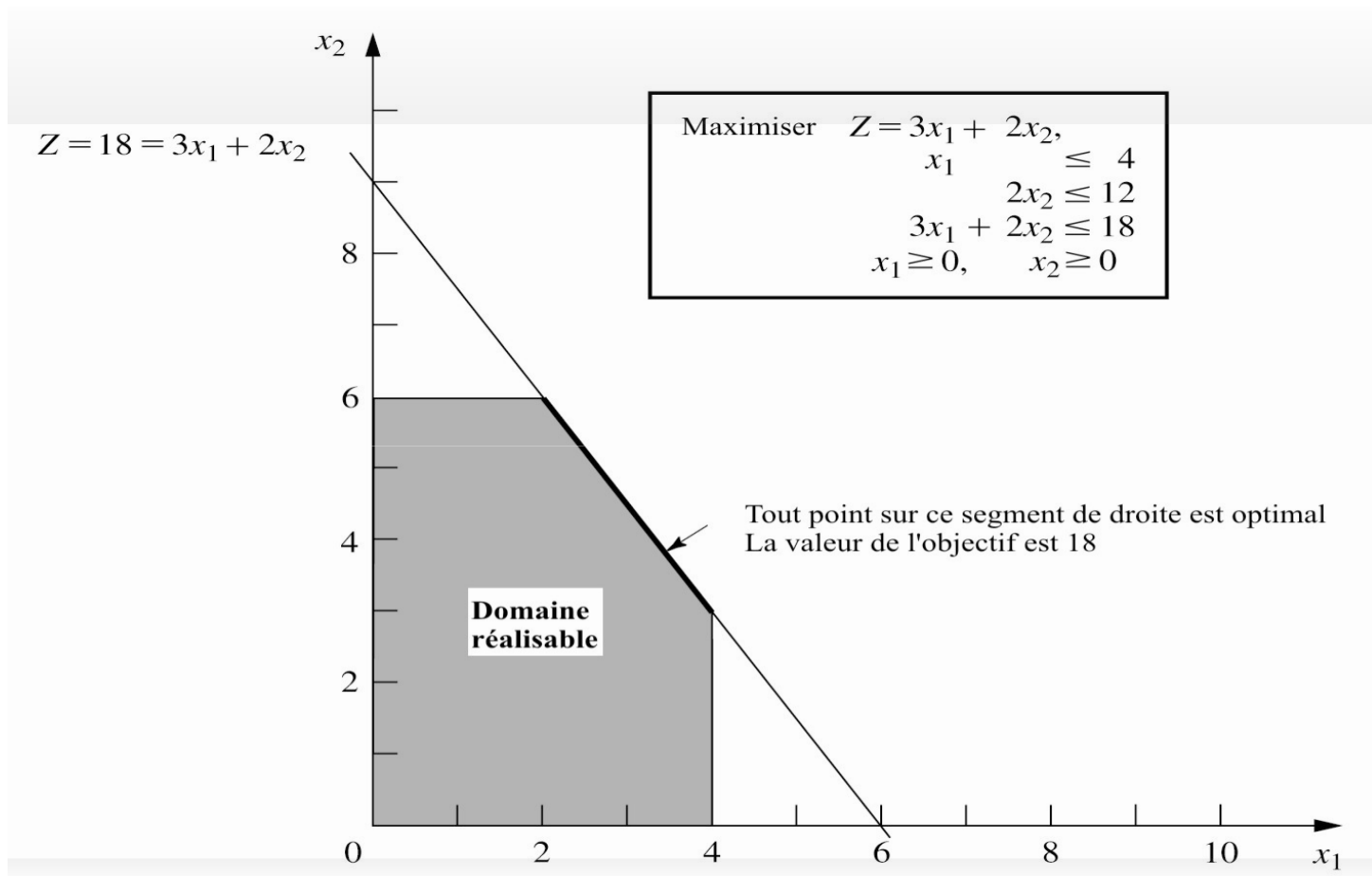
Domaine réalisable vide



Objectif non borné



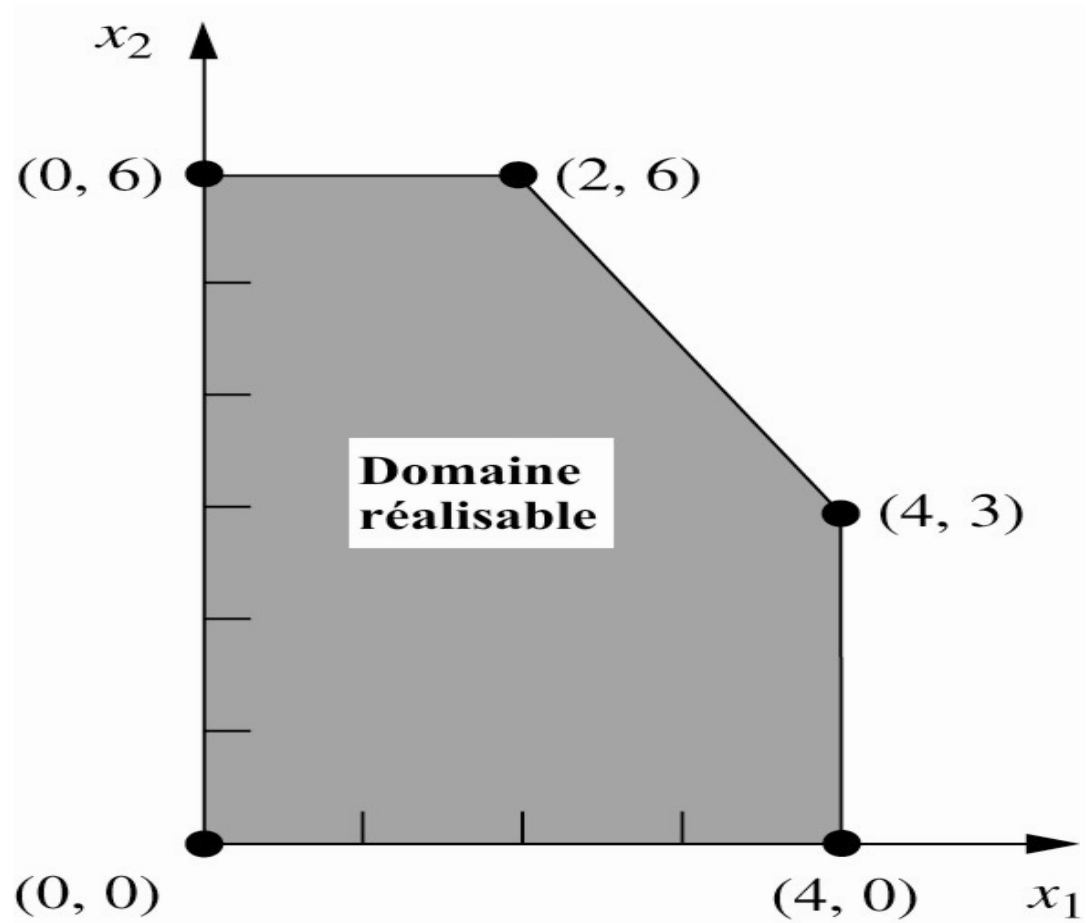
Infinité de solutions optimales



Interprétation géométrique

- *Point extrême du domaine réalisable* : solution réalisable correspondant à un coin du domaine réalisable
- En deux dimensions, un coin est la rencontre de deux droites (ou plus) définies par les frontières des contraintes
- **Théorème:** Supposons qu'un modèle de PL a un domaine réalisable non vide et borné; alors il existe au moins une solution optimale correspondant à un point extrême du domaine réalisable

Points extrêmes



Exemple pratique

Représenter graphiquement le domaine réalisable et résoudre par la méthode graphique le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{array}{l} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Solution

L'intersection des demi-plans déterminés par les droites qui correspondent aux contraintes représente l'ensemble des solutions qui satisfont aux contraintes. La direction qui correspond à la fonction-objectif est donnée par

$$z = 2x_1 + 3x_2 = \text{constante}.$$

Détermination de la solution optimale

Première méthode : On obtient la solution optimale $x = (3, 4)$ en effectuant une translation parallèle de cette direction du haut vers le bas jusqu'à ce que le domaine hachuré est atteint. Le point x est un point extrême de ce domaine.

Deuxième méthode : On détermine tous les points extrêmes car la solution optimale correspond forcément à un point extrême. Les points extrêmes sont : $(0, 2); (0, 4); (3, 4); (3, 1); (2, 0); \left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Les valeurs respectives de la fonction objectif sont $z = 6; 12; 18; 9; 4; \frac{8}{3}$. Donc le minimum est atteint au point $x = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$ et le maximum est atteint au point $x = (3, 4)$. Par conséquent la solution optimale pour le problème de maximisation est $x = (3, 4)$.