Méthodes d’Optimisation

Optimisation de fonctions d’une ou de plusieurs variables réelles

Nom du Professeur Babacar TOUMBOU

Optimisation libre d'une fonction d'une variable réelle

Définition I.1. *soit* $f : Df \to \mathbb{R}$ *une fonction d'une variable.*

x_0 *est un point de maximum (resp. minimum) global pour* f *si pour tout*

$x \in Df\,,\; f(x) \leq f(x_0)$ *(resp.* $x \in Df\,,\; f(x) \geq f(x_0)$ *).*

$f(x_0)$ *est alors le maximum (resp. minimum) global de* f

x_0 *est un point de maximum (resp. minimum) local pour* f *s'il existe* ***un voisinage*** *V de* x_0 $(x_0 \in V \subset Df)$

tel que x_0 *soit un maximum (resp. minimum) global de la fonction* f *restreinte au domaine* V

.

•*un extremum est un minimum ou un maximum.*

Optimisation libre d'une fonction d'une variable réelle

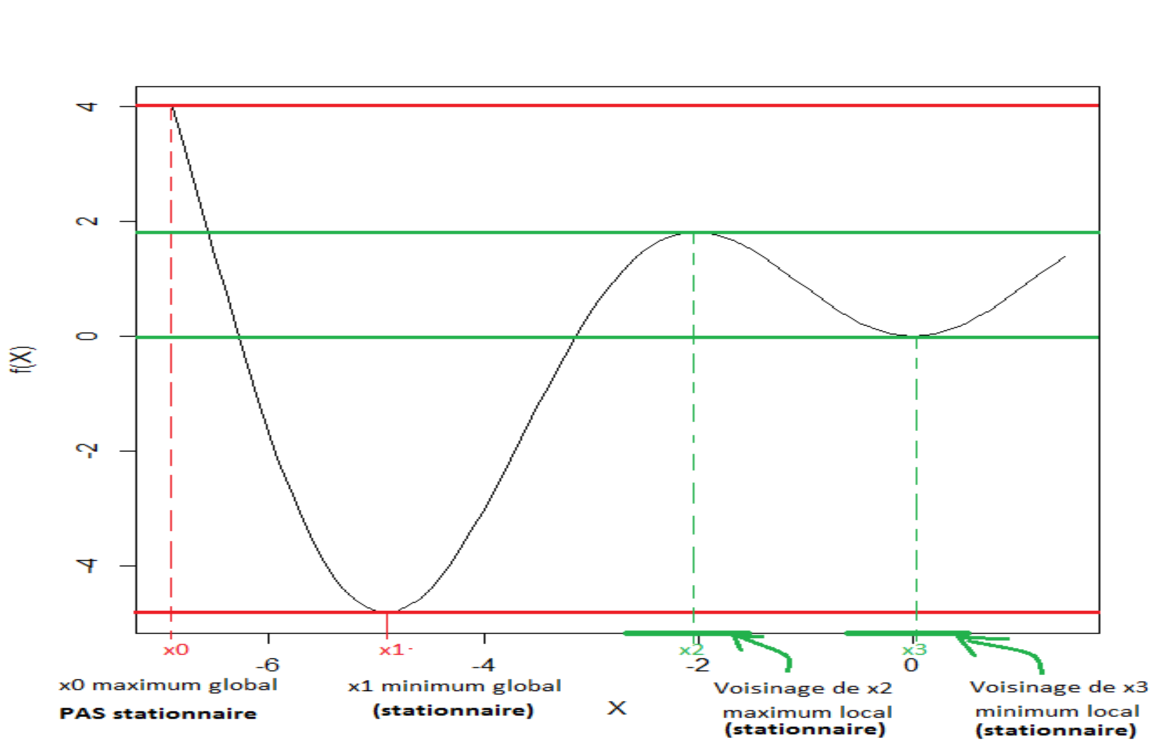
Définition 1.

Si f *est dérivable sur* Df *et si* x_0 *est à l'intérieur du domaine* Df *(pas sur le bord).* x_0 *est appelée point stationnaire si* $f'(x_0) = 0$.

Proposition 1.

Si f *est dérivable sur* Df *et si* x_0 *est un extrémum local situé à l'intérieur du domaine* Df *et si* f' *est continue au voisinage de* x_0*, alors* x_0 *est un point stationnaire.*

Illustration graphique



Optimisation libre d'une fonction d'une variable réelle

Méthodologie-Exemple:

1. **Définir les différentes variables :** x
2. **Ecrire l'objectif :** $Optimiser\ la\ fonction\ \ f(x) = x^2$
3. **Recherche de points stationnaires :** $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Le seul point stationnaire est $x = 0$

4. **Nature du point stationnaire : signe de** $f''(x)$

$$f''(x) = 2 > 0.$$

Donc le point $x = 0$ est un minimum pour f.

Optimisation libre d'une fonction d'une variable réelle

Exemple 2: Optimiser la fonction $f(x) = x^3(x^2 - 1)$

1. **Définir les différentes variables :** x
2. **Ecrire l'objectif :** $Optimiser\ la\ fonction\ \ f(x) = x^3(x^2 - 1)$
3. **Recherche de points stationnaires :** $f'(x) = 0$

$$f'^{(x)} = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\ \ ou\ \ x = \sqrt{\frac{3}{5}}\ \ ou\ \ x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Les points stationnaires sont $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\quad x_2 = 0\ \ et\ \ x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

4. **Nature du point stationnaire : signe de** $f''(x)$

Optimisation libre d’une fonction d’une variable réelle

$$f''(x) = 20x^3 - 6x = 2x(10x^2 - 3).$$

		x_1	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$x_2 = 0$	$+\sqrt{\frac{3}{10}}$	x_3
$2x$	-	-	-	+	+	+
$10x^2 - 3$	+	+	-	-	+	+
$f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$	-	-	+	-	+	+

Optimisation libre d'une fonction d'une variable réelle

Le tableau de signe permet de conclure que :

- $f''(x_1) < 0, donc\ \ x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ est un maximum pour f
- $f''(x_2) = 0, donc\ on\ ne\ peut\ rien\ dire\ pour\ \ x_2 = 0\ f$
- $f''(x_3) > 0, donc\ \ x_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$ est un minimum pour f

A VENIR DANS CETTE SEQUENCE

- Optimisation entre des bornes d’une fonction d’une variable réelle
- Application à l’optimisation sous contrainte d’une fonction de deux variable : Méthode de substitution
- Convexité et caractérisation des extremums
- Optimisation libre des fonctions de deux variables