Méthodes d’Optimisation

Optimisation de fonctions d’une ou de plusieurs variables réelles

Nom du Professeur Babacar TOUMBOU

Optimisation entre des bornes d'une fonction d'une variable réelle

Théorème (**Weierstrass**). Toute fonction *f* continue sur un ensemble fermé et borné (qui contient ses bords) possède un maximum global et un minimum global.

Théorème (caractérisation des extréma globaux en optimisation entre des bornes)

Soit $f(x)$, une fonction continue définie sur un intervalle fermé $[a, b]$.
Soient ***xmin***, le point où *f* atteint son minimum absolu sur $[a, b]$, et ***xmax***, le point où *f* atteint son maximum absolu sur $[a, b]$. Alors, ***xmin et xmax*** se trouveront toujours à l'un ou l'autre des points suivants :

- **point stationnaire** ;

- **point de borne**.

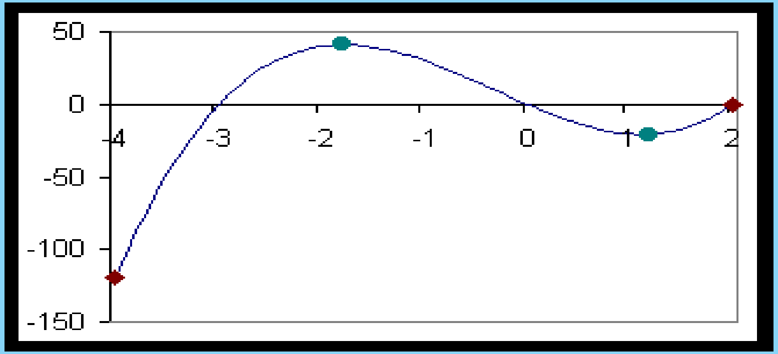
Illustration graphique

Le graphique suivant illustre le sens du théorème.

- fonction bornée sur *[-4 , 2]*.
- deux optima locaux *(en vert)* : un maximum local en

x = -1,8 (maximum global aussi) ainsi qu'un minimum local en *x = 1,1.*

- le minimum absolu de *f* sur *[-4, 2]* ne se trouve pas en *x = 1,2* mais
- plutôt au point de borne gauche, *x = - 4.*



Optimisation entre des bornes d'une fonction d'une variable réelle

Méthodologie:

1. **Effectuer la dérivée première** ;
2. **Trouver tous les points stationnaires de *[a, b]*;**
3. **Évaluer *f(x)* aux points stationnaires et aux bornes ;**
4. **Identifier le minimum et le maximum absolus sur *[a, b]*.**

Optimisation entre des bornes d'une fonction d'une variable réelle

Exemple:

Trouver le minimum et le maximum absolus de la fonction

$f(x) = x^3 - 12x + 9$ sur l'intervalle *[0, 3]*.

Solution

1. **Dérivée première:** $f'(x) = 3x^2 - 12$
2. **Recherche de points stationnaires:** $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \;\; ou \;\; x = 2$$

Or, puisque les bornes nous contraignent à l'intervalle *[0, 3]*, seul le point stationnaire $x = 2$ est retenu.

Optimisation entre des bornes d’une fonction d’une variable réelle

3. Evaluer f aux points stationnaires

- Point stationnaire $x = 2$: $f(2) = -7$
- Borne gauche $x = 0$: $f(0) = 9$
- Borne droite $x = 3$: $f(3) = 0$

4. Identifier le minimum et le maximum absolus sur [0, 3].

- Maximum absolu : $f(0) = 9$
- Minimum absolu : $f(2) = -7$

A VENIR DANS CETTE SEQUENCE

- Application à l’optimisation sous contrainte d’une fonction de deux variable : Méthode de substitution

- Convexité et caractérisation des extremums

- Optimisation libre des fonctions de deux variables