Méthodes d’Optimisation

Optimisation de fonctions d’une ou de plusieurs variables réelles

Nom du Professeur Babacar TOUMBOU

Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variable : Méthode de substitution

Considérons une fonction de deux variables $f(x,y)$. *On souhaite trouver les extrema de* f *sous la contrainte* $y = g(x)$.

Exemple:Maximiser $f(x,y)$ *sous la contrainte* $y = g(x)$, *c'est à dire, trouver*

$$\max\{f(x,y) : (x,y) \in Df \text{ et } y = g(x)\}.$$

La méthode de substitution consiste simplement à trouver les extréma de la fonction d'une variable : $\widehat{f}(x) = f\big(x, g(x)\big)$

Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variable : Méthode de substitution

Méthodologie:

1. **Définir les différentes variables :**
2. **Ecrire l'objectif :**
3. **Ecrire toutes les contraintes**
4. **Exprimer, utilisant les contraintes, toutes les variables en fonction d'une seule**
5. **Substituer ces expressions dans la fonction «objectif»**
6. **Optimiser**

Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variable : Méthode de substitution

Exemple: Optimisons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte : $x + y = 1$

1. **Définir les différentes variables :** x, y

2. **Ecrire l'objectif :** $Optimiser\ la\ fonction\ \ f(x,y) = x^2 + y^2$

3. **Ecrire toutes les contraintes :** $x + y = 1$

4. **Exprimer, utilisant les contraintes, toutes les variables en fonction d'une seule**

   En utilisant la contrainte $x + y = 1$ on obtient $y = 1 - x$

Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variable : Méthode de substitution

5. **Substituer ces expressions dans la fonction «objectif»**

$$\hat{f}(x) = f\big(x, g(x)\big) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 2x + 1$$

6. **Optimiser**

Nous avons une fonction à une seule variable que l'on peut optimiser en faisant recours aux méthodes utilisées précédemment dans le cas des fonctions d'une seule variable.

a. **Dérivée première**: $f'(x) = 4x - 2$
b. **Recherche de points stationnaires:** $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \; x = 0{,}5$$

Le seul point stationnaire est $x = 0{,}5$

Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variable : Méthode de substitution

c. Nature du point stationnaire : signe de $\hat{f}''(x)$

$$\hat{f}''(x) = 4 > 0.$$

Donc le point $x = 0{,}5$ est un **minimum** pour $\hat{f}$

La valeur correspondante de y est obtenue de la relation

$$y = 1 - x = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Par suite, la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est minimisée lorsque $x = y = 0{,}5$ sous la contrainte $x + y = 1.$

A VENIR DANS CETTE SEQUENCE

- Convexité et caractérisation des extremums
- Optimisation libre des fonctions de deux variables