

Convexité et caractérisation des extremums

Définition 4 (Convexité).

Si f est deux fois dérivable sur son domaine de définition Df .

- *On dit que f est convexe (resp. concave) si $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$).*
- *On dit que f est localement convexe (resp. localement concave) autour d'un point x_0 situé à l'intérieur de Df s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$) pour tout $x \in V$.*

Convexité et caractérisation des extremums

Proposition.

f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I ssi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

$$(resp. f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y))$$

pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Remarque. Cette caractérisation de la convexité est généralement prise comme définition.

Convexité et caractérisation des extremums

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable telle que f'' soit continue. Soit x_0 un point stationnaire de f .

1. Si $f''(x_0) > 0$ alors x_0 est un minimum local.
2. Si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local.
3. Si $f''(x_0) = 0$ alors on ne peut pas conclure.

Proposition. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .
Si f est convexe (resp. concave) alors x_0 est un minimum global (resp. maximum global).

Convexité et caractérisation des extremums

Exemple 1. Etudier la convexité des fonctions suivantes vues précédemment et conclure sur la nature des extréma obtenues

Nous avons optimisé la fonction $f(x) = x^2$ précédemment et avons démontré que le point $x = 0$ est un minimum pour f . Mais, nous n'avons pas précisé si ce minimum était local ou global.

Remarquons que $f''(x) = 2 > 0$ pour tout x , donc la fonction f est convexe et par conséquent, le point $x = 0$ est un minimum global pour f .

Convexité et caractérisation des extremums

Exemple 2. Etudier la convexité des fonctions suivantes vues précédemment et conclure sur la nature des extréma obtenues

Nous avons également optimisé la fonction $f(x) = x^3(x^2 - 1)$ précédemment et

avons démontré que le point $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ est un maximum pour f

et que le point $x_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$ est un minimum pour f .

Mais, nous n'avons pas précisé la nature locale ou globale de ces extréma.

Convexité et caractérisation des extremums

Remarquons, 1) d'une part, que $f''(x) > 0$ pour tout $x > +\sqrt{\frac{3}{10}}$ donc la fonction f

est localement convexe et par conséquent, le point $x_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$ est

un minimum local pour f ;

2) d'une part, que $f''(x) < 0$ pour tout $x < -\sqrt{\frac{3}{10}}$ donc la fonction f

est localement convexe et par conséquent, le point $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ est

un minimum local pour f .

A VENIR DANS CETTE SEQUENCE

- Optimisation libre des fonctions de deux variables