



## Optimisation libre des fonctions de deux variables

**Définition.** *Pour les fonctions de deux variables, les voisinages d'un point  $P_0 = (x_0, y_0)$  peuvent être assimilés à des disques de centre  $P_0$  et de rayon aussi petit qu'on veut.*

**Définition.** *Soit  $f$  une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ .*

*$P_0 = (x_0, y_0)$  appartenant à l'intérieur de  $D$  (pas sur les bords) est appelé point stationnaires si  $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$ .*

# Condition nécessaire du premier ordre

**Définition.** Si  $f$  possède des dérivées partielles continues dans un voisinage d'un point  $P_0 = (x_0, y_0)$  situé à l'intérieur de son domaine de définition et si  $P_0 = (x_0, y_0)$  est un extrémum local de  $f$  alors  $P_0 = (x_0, y_0)$  est un point stationnaire.

Autrement dit les extrema locaux sont à chercher parmi les points stationnaires.

# Conditions du second ordre

**Proposition.** Soit  $f$  une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire  $P_0 = (x_0, y_0)$  situé à l'intérieur de son domaine de définition. Posons

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

1. Si  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$  et  $r_0 > 0$  alors  $P_0 = (x_0, y_0)$  est un minimum local
2. Si  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$  et  $r_0 < 0$  alors  $P_0 = (x_0, y_0)$  est un maximum local
3. Si  $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$  alors  $P_0 = (x_0, y_0)$  n'est ni un maximum ni un minimum local. (On dit que  $P_0 = (x_0, y_0)$  est un point selle)
4. Sinon on ne peut rien dire

# Conditions du second ordre et convexité

## Définition (Convexité).

Soit  $f$  une fonction de deux variables définie sur une partie convexe  $D \subset \mathbb{R}^2$  et possédant des dérivées partielles du second ordre.

On dit que  $f$  est convexe si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$ .

On dit que  $f$  est concave si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0$ .

## Proposition (Conditions d'existence d'extréma globaux).

Si  $f$  est convexe (resp. concave) et admet un point stationnaire  $P_0 = (x_0, y_0)$  alors  $P_0 = (x_0, y_0)$  est un minimum global (resp. maximum global).

# Conditions du second ordre et convexité

**Proposition.** Soit  $f$  une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire  $P_0 = (x_0, y_0)$  situé à l'intérieur de son domaine de définition. Posons

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

1. Si  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$  et  $r_0 > 0$  alors  $f$  est convexe au voisinage de  $P_0 = (x_0, y_0)$
2. Si  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$  et  $r_0 < 0$  alors  $f$  est concave au voisinage de  $P_0 = (x_0, y_0)$
3. Si  $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$  alors  $f$  n'est ni convexe ni concave au voisinage de  $P_0 = (x_0, y_0)$
4. Sinon on ne peut rien dire

# Conditions du second ordre et convexité

**Exemple 1:** Optimiser la fonction de deux variables suivante

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - y \quad (Df = \mathbb{R}^2)$$

1. Recherche de points stationnaires : résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Un seul point stationnaire :  $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

# Conditions du second ordre et convexité

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3 \end{cases}$$

Le point stationnaire  $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$  est-il un extrémum local?

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 3 \implies r_0 t_0 - s_0^2 = -5 < 0$$

# Conditions du second ordre et convexité

Donc, le point  $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$  est un point selle. Par conséquent, pas besoin de vérifier si  $f$  est convexe ou concave:  $P_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$  n'est pas un extremum local donc *a fortiori* pas un extremum global

# Conditions du second ordre et convexité

**Exemple 2:** Optimiser la fonction de deux variables suivante

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (Df = \mathbb{R}^2)$$

1. Recherche de points stationnaires : résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Un seul point stationnaire :  $P_0 = (0,0)$

# Conditions du second ordre et convexité

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

3. Le point stationnaire  $P_0 = (0,0)$  est-il un extrémum local ou global?

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 t_0 - s_0^2 = 4 > 0 \text{ et } r_0 > 0$$

# Conditions du second ordre et convexité

Donc, le point  $P_0 = (0,0)$  est un **minimum local**.

4. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$



$$r(x, y)t(x, y) - (s(x, y))^2 = 4 > 0 \text{ et } r(x, y) > 0$$

Donc  $f$  est **convexe** et le point  $P_0 = (0,0)$  est un **minimum global**.

A VENIR DANS LA PROCHAINE SEQUENCE: SEQUENCE 3

- Optimisation sous contrainte d'égalité : la méthode du Lagrangien