Optimisation de fonctions de deux variables réelles sous contraintes d’égalité: la méthode du Lagrangien

Mathématiques et statistiques pour les sciences sociales 2

Babacar TOUMBOU

Principe de la méthode du Lagrangien

Nous avons vu dans le chapitre précédent la méthode de substitution permettant d'optimiser une fonction de deux variables $f(x,y)$ *sous une contrainte du type* $y = g(x)$, c'est dire lorsque la contrainte permet d'exprimer une variable en fonction d'une autre.

La **méthode du Lagrangien** décrite ici est plus générale:elle permet de traiter le cas où la contrainte s'écrit sous la forme implicite $\mathrm{g}(x,y) = 0$.

Par exemple:Maximiser $f(x,y)$ *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$, *c'est à dire, trouver*

$$\max\{f(x,y):(x,y) \in Df \;\; et \;\; g(x,y) = 0\}.$$

Condition nécessaire du premier ordre

Théorème. *Si f et g deux fonctions de deux vaiables possédant des dérivées partielles premières* $et\ P_0 = (x_0, y_0)\ un\ point$

$intérieur$ à $Df \quad et \ Dg \ .Si\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ extrémum\ local$

$de\ f\ sur\ D = \{(x,y):\ \ g(x,y) = 0\}\ et\ que\ \ \vec{\nabla} g(P_0) \neq \vec{0}$

alors il existe un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\vec{\nabla} f(P_0) = \lambda_0 \vec{\nabla} g(P_0)$.

$P_0 = (x_0, y_0)$est appelé point stationnaire de f sur D et

λ_0 est appelé multiplicateur de Lagrange associé.

Condition nécessaire du premier ordre pour le Lagrangien

Définition. *Le Lagrangien L associé à la fontion f et à la contrainte g est la fonction de trois variables définie par*

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Proposition. $P_0 = (x_0, y_0)$est appelé point stationnaire de f sur D *associé* au multiplicateur de Lagrange λ_0 ssi (x_0, y_0, λ_0) vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Caractérisation faible des extrema locaux sous contrainte - Condition suffisante du second ordre

Proposition. *Soient f et g deux fonctions de deux vaiables possédant des dérivées partielles continues au voisinage d'un point stationnaire* $P_0 = (x_0, y_0)$*sous la contrainte* $D = \{(x, y): g(x, y) = 0\}$

$associé$ au multiplicateur de Lagrange $\lambda_0. Posons\ la\ fonction\ de\ deux\ variables\ \ L_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$.

1. $si\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ minimum\ local\ libre\ de\ L_0\ alors\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ minimum\ local\ sur\ D\ de\ la\ fonction\ f$
2. $si\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ maximum\ local\ libre\ de\ L_0\ alors\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ maximum\ local\ sur\ D\ de\ la\ fonction\ f$
3. $sinon\ on\ ne\ peut\ rien\ dire\ldots$

Caractérisation extréma globaux: Théorème de Weierstrass

- **Théorème** (Weierstrass). *Toute fonction f continue sur un ensemble K fermé et borné (qui contient ses bords) possède un maximum global et un minimum global.*

- **Exemple** : Le cercle $D = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ est fermé et borné. Donc toute fonction f définie et continue sur ce domaine possède un maximum et un minimum global sur D

Caractérisation des extrema globaux sous contrainte - Condition suffisante sur le Lagrangien

Proposition. *Soient f et g deux fonctions de deux vaiables possédant des dérivées partielles du second ordre. Considérons la contrainte* $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ *et un point stationnaire* $P_0 = (x_0, y_0)$ *associé au multiplicateur de Lagrange* λ_0. *Posons la fonction de deux variables définie sur une partie convexe* $D_0 \subset \mathbb{R}^2$: $L_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$.

1. $si\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ minimum\ global\ libre\ de\ L_0\ sur\ D_0$ $(si\ L_0\ est\ convexe)\ alors\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ minimum\ global\ sur\ D\ de\ f$

2. $si\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ maximum\ global\ libre\ de\ L_0\ sur\ D_0$ $(si\ L_0\ est\ concave)\ alors\ P_0 = (x_0, y_0)\ est\ un\ maximum\ global\ sur\ D\ de\ f$

Caractérisation des extrema globaux sous contrainte - Condition suffisante sur le Lagrangien

Exemple. *Optimiser la fonction* $f(x,y) = xy$
sous la contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Solution

1. $D_{\mathrm{f}} = D_{\mathrm{g}} = \mathbb{R}^2$:
2. *Lagrangien*: $L\ (x,y,\lambda\ ) = xy - \lambda\ (x^2 + y^2 - 1)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{1}{2} \\ y = 2\lambda x \\ x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Caractérisation des extrema globaux sous contrainte - Condition suffisante sur le Lagrangien

Finalement les quatre points stationnaires sur D sont :

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) associé\ au\ multiplicateur\ de\ Lagrange \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) associé\ au\ multiplicateur\ de\ Lagrange \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

$$P_3 = (x_3, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) associé\ au\ multiplicateur\ de\ Lagrange\ \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

$$P_4 = (x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) associé\ au\ multiplicateur\ de\ Lagrange\ \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

Caractérisation des extrema globaux sous contrainte - Condition suffisante sur le Lagrangien

3. *Par le Théorème de Weierstrass, f possède parmi ces points stationnaires au moins un minimum global sur D et un maximum global.*

Il suffit d'évaluer f en ces points stationnaires:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2},\ f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$

f possède donc deux maxima globaux sur : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et deux minima globaux sur D: (x_3, y_3) et (x_4, y_4)

A VENIR DANS LA PROCHAINE SEQUENCE: SEQUENCE 4

- Modèles de Recherche Opérationnelle (RO)