



Modèles de Recherche Opérationnelle (RO): Programmation linéaire (PL)
Mathématiques et statistiques pour les sciences sociales 2

Babacar TOUMBOU

Principe de la PL

- ❖ Résoudre des problèmes classiques de planification : affecter des ressources limitées à plusieurs activités concurrentes
- ❖ Programme = Plan (solution de ce problème)
- ❖ Programmation mathématique (RO) ≠ Programmation informatique
- ❖ Fonction linéaire: fonction dans laquelle chaque variable évolue linéairement

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- ❖ Modèle de PL = Modèle de programmation mathématique dans lequel toutes les fonctions sont linéaires

Exemple d'un modèle de PL

1. **Données du problème** (Compagnie: *WyndorGlass*)
 - a. Deux types de produits (produit 1, produit 2)
 - b. Trois usines (usine 1, usine 2, usine 3)
 - c. Capacité de production pour chaque usine (par semaine)
 - d. Profit par lot (20 unités) de chaque produit

	Produit 1 (tps de production, h/lot)	Produit 2 (tps de production, h/lot)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit(\$)/lot	3000	5000	

Exemple d'un modèle de PL

- e. Chaque lot du produit 1 est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3
- f. Chaque lot du produit 2 est le résultat combiné de la production aux usines 2 et 3

2. Énoncé du problème: Déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots/semaine) de façon à maximiser le profit total

➤ **Variables de décision:**

$x_1 =$ nombre de lots du produit 1

$x_2 =$ nombre de lots du produit 2

➤ **Fonction objectif:**

$Z =$ profit total

$Z = 3x_1 + 5x_2$ (profit total en milliers de \$)

➤ **Objectif:** Maximiser Z



Exemple d'un modèle de PL

➤ Contraintes de capacité de production

- $x_1 \leq 4$ (*usine 1*)
- $2x_2 \leq 12$ (*usine 2*)
- $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (*usine 3*)

➤ Contraintes de non négativité

- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (*nombre d'unités produites ≥ 0*)

Modèle de PL obtenu

➤ Maximiser $Z = 3x_1 + 5x_2$

➤ Sous les contraintes

- $x_1 \leq 4$ (*usine 1*)
- $2x_2 \leq 12$ (*usine 2*)
- $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (*usine 3*)
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (*nombre d'unités produites ≥ 0*)

Résolution: Méthode graphique

Méthodologie de la méthode graphique

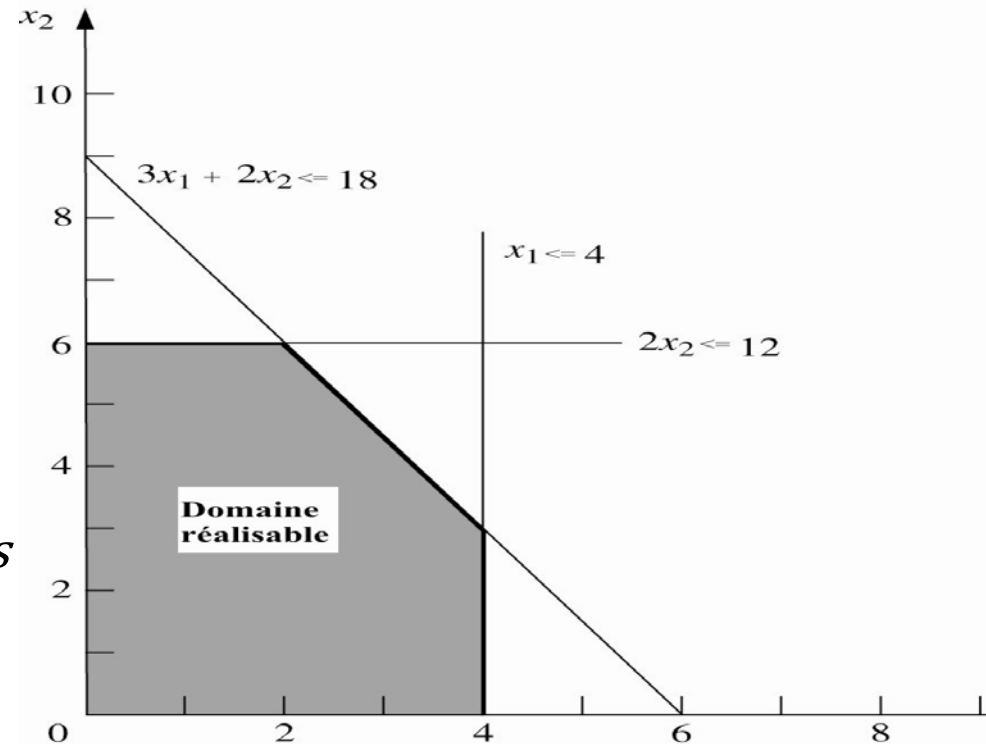
1. Tracer les droites correspondant aux contraintes
2. Déterminer le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte
3. Tracer les droites correspondant à la variation de l'objectif
 - Dans l'exemple: $Z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -(3/5)x_1 + (1/5)Z$
 - Ordonnée à l'origine (dépend de la valeur de Z): $(1/5) Z$
 - Pente: $- 3/5$
 - Maximiser: augmenter Z

Résolution: Méthode graphique

➤ Maximiser $Z = 3x_1 + 5x_2$

➤ Sous les contraintes

- $x_1 \leq 4$ (*usine 1*)
- $2x_2 \leq 12$ (*usine 2*)
- $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (*usine 3*)
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (*nb d'unités produites*)



Résolution: Méthode graphique

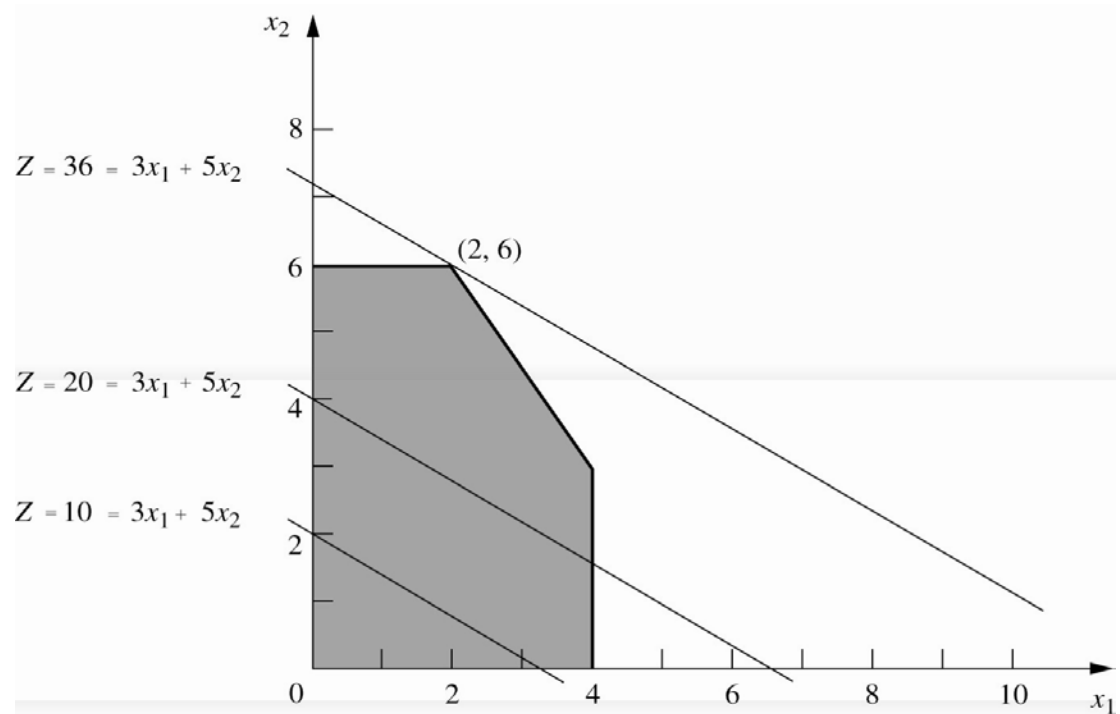
Maximiser l'objectif

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

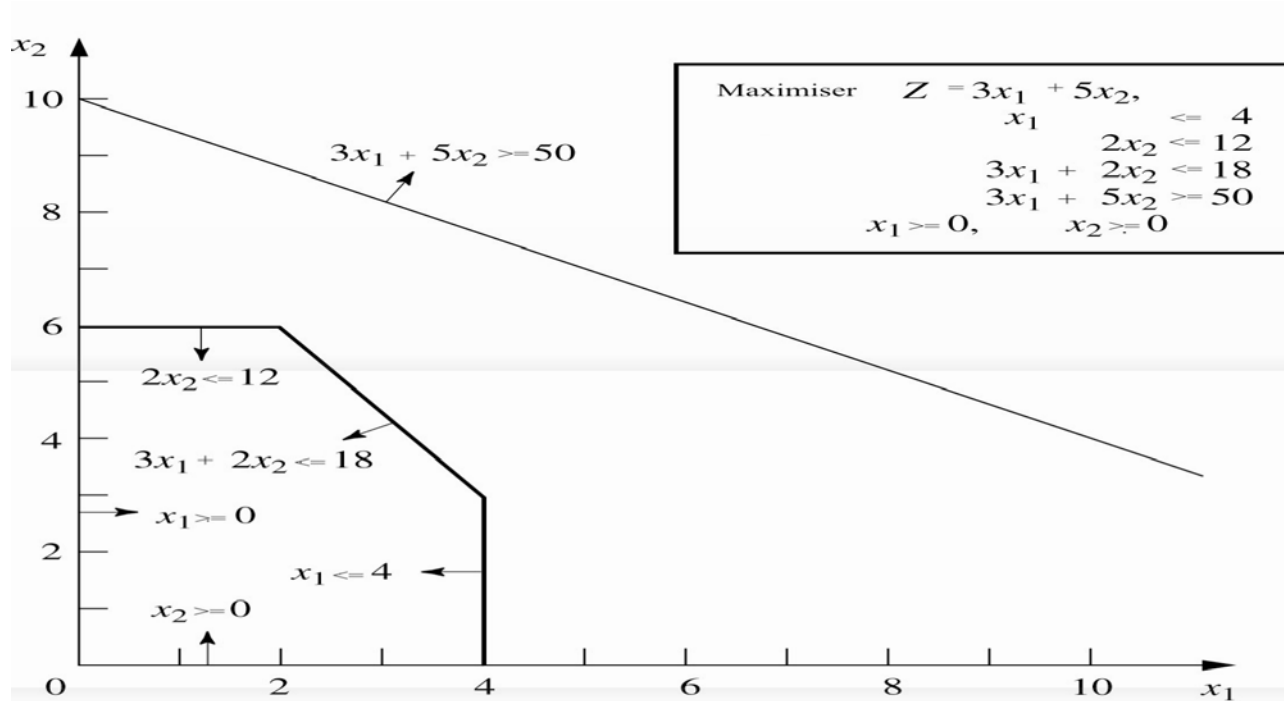
$$Z = 36 = 3x_1 + 5x_2$$

$$Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$$

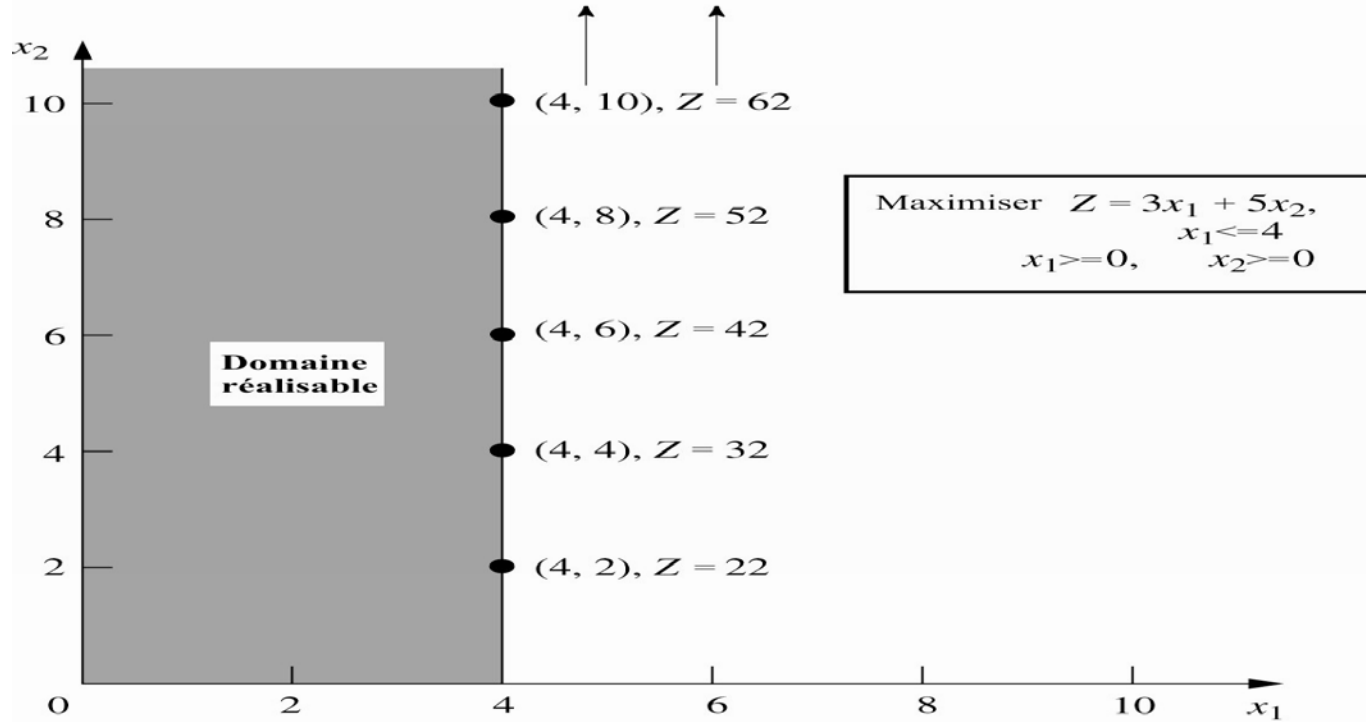
$$Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$$



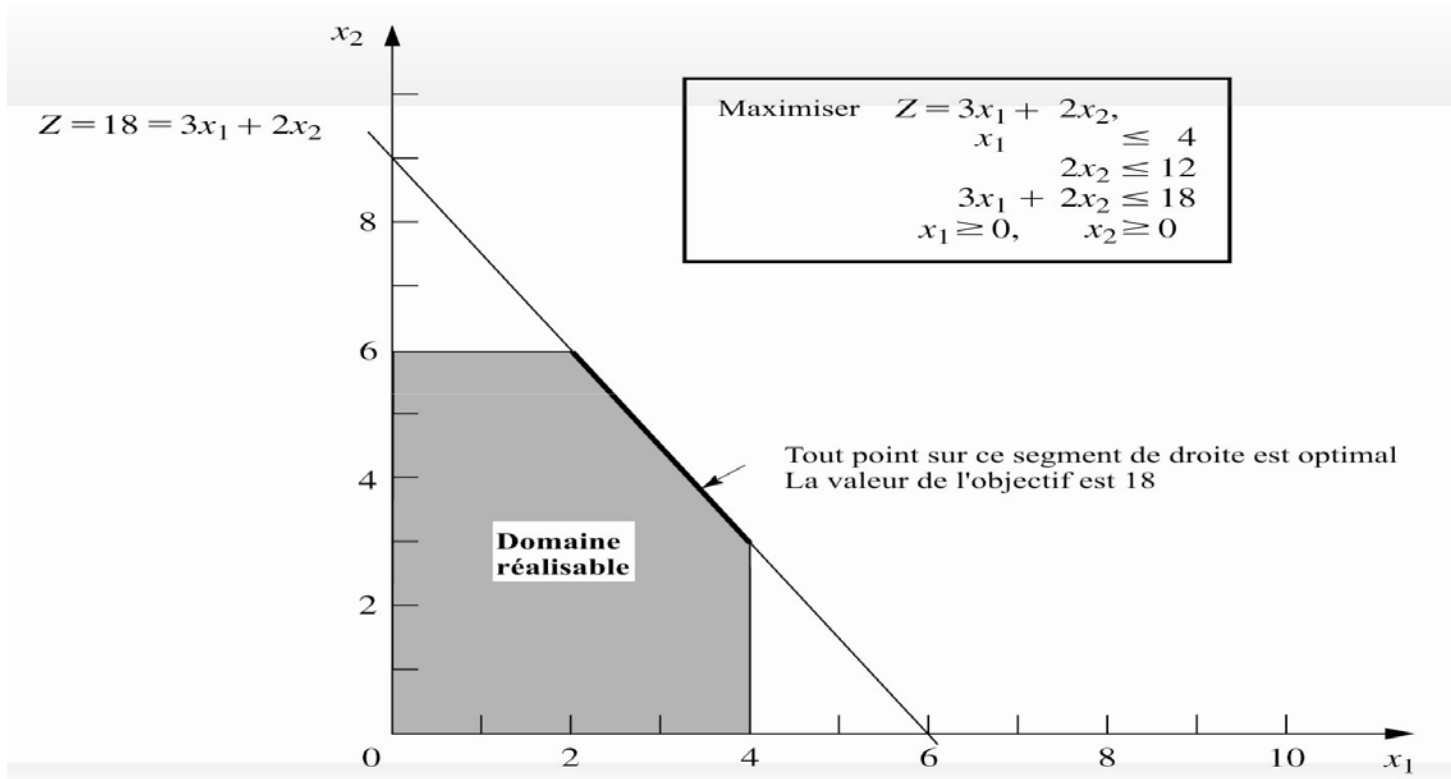
Illustrations: Domaine réalisable vide



Illustrations: Objectif non borné



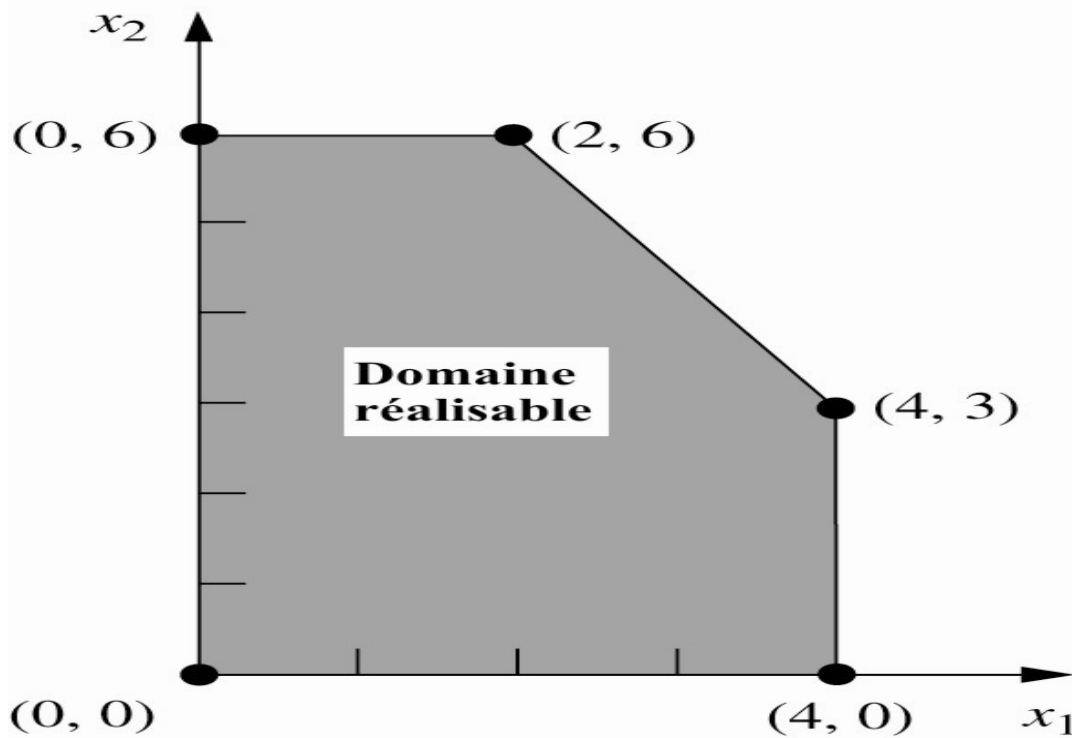
Illustrations: Infinité de solutions optimales



Interprétation géométrique

- ❖ *Point extrême du domaine réalisable* : solution réalisable correspondant à un coin du domaine réalisable
- ❖ En deux dimensions, un coin est la rencontre de deux droites (ou plus) définies par les frontières des contraintes
- ❖ **Théorème**: Supposons qu'un modèle de PL a un domaine réalisable non vide et borné; alors il existe au moins une solution optimale correspondant à un point extrême du domaine réalisable

Points extrêmes



Exemple pratique 1

Résoudre par la méthode graphique le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution

L'intersection des demi-plans déterminés par les droites qui correspondent aux contraintes représente l'ensemble des solutions qui satisfont aux contraintes. La direction qui correspond à la fonction-objectif est donnée par: $z = 3x_1 + 5x_2 = cte$

Exemple pratique 1

Détermination de la solution optimale

Première méthode : On obtient la solution optimale $x = (2,6)$ en effectuant une translation parallèle de cette direction du haut vers le bas jusqu'à ce que le domaine hachuré est atteint. Le point x est un point extrême de ce domaine.

Deuxième méthode : On détermine tous les points extrêmes car la solution optimale correspond forcément à un point extrême. Les points extrêmes sont :

$(0,0)$; $(0,6)$; $(2,6)$; $(4,3)$; $(4,0)$. Les valeurs respectives de la fonction objectif sont:

$z = 0$; 30 ; 36 ; 27 ; 12 . Donc le minimum est atteint au point $x = (0,0)$ et le maximum est

atteint au point $x = (2,6)$. Par conséquent la solution optimale pour le problème de maximisation est $x = (2,6)$

Exemple pratique 2

Résoudre par la méthode graphique le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution

L'intersection des demi-plans déterminés par les droites qui correspondent aux contraintes représente l'ensemble des solutions qui satisfont aux contraintes. La direction qui correspond à la fonction-objectif est donnée par: $z = 2x_1 + 3x_2 = cte$

Exemple pratique 2

Détermination de la solution optimale

Première méthode : On obtient la solution optimale $x = (3,4)$ en effectuant une translation parallèle de cette direction du haut vers le bas jusqu'à ce que le domaine hachuré est atteint. Le point x est un point extrême de ce domaine.

Deuxième méthode : On détermine tous les points extrêmes car la solution optimale correspond forcément à un point extrême. Les points extrêmes sont :

$(0,2); (0,4); (3,4); (3,1); (2,0); \left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Les valeurs respectives de la fonction objectif sont:

$z = 6; 12; 18; 9; 4; \frac{8}{3}$. Donc le minimum est atteint au point $x = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$ et le maximum est

atteint au point $x = (3,4)$. Par conséquent la solution optimale pour le problème de maximisation est $x = (3,4)$

Limites de la méthode graphique

- Uniquement pour les modèles à deux variables
- Plus de deux variables: méthode du simplexe
- Logiciels proposant la méthode du simplexe: Excel Solver

FIN DE CETTE SEQUENCE: **FIN DU COURS**

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

