

Table des matières

0	Rappels sur les polynômes et fractions algébriques	1
0.1	Puissances	1
0.1.1	Puissance d'un nombre réel	1
0.1.2	Loi des exposants	1
0.1.3	Puissance d'exposant entier négatif	2
0.1.4	Puissance d'exposant rationnel	2
0.1.5	Racine n -ième d'un nombre réel	3
0.1.6	Propriétés des radicaux	3
0.1.7	Réduction du radicande	3
0.2	Polynômes	4
0.2.1	Monômes	4
0.2.2	Opérations entre monômes	4
0.2.3	Polynômes	4
0.2.4	Somme et différence de polynômes	5
0.2.5	Produit de polynômes	5
0.2.6	Identités remarquables	5
0.2.7	Quotient de polynômes	6
0.2.8	Théorème du reste	6
0.3	Factorisation	6
0.3.1	Mise en évidence simple	6
0.3.2	Mise en évidence double	7
0.3.3	Différence de deux carrés	7
0.3.4	Factorisation en plusieurs étapes	7
0.3.5	Trinômes carrés parfaits	7
0.3.6	Discriminant d'un trinôme du second degré	8
0.3.7	Trinôme du second degré : méthode "Complétion du carré"	8
0.3.8	Trinôme du second degré : méthode "Produit et somme"	8
0.3.9	Trinôme du second degré : méthode du discriminant	8
0.4	Fractions rationnelles	8
0.4.1	Fraction rationnelle	8
0.4.2	Addition et soustraction de fractions rationnelles	9
0.4.3	Multiplication et division de fractions rationnelles	9
0.4.4	Décomposition en une somme de fractions rationnelles	10
0.5	Exercices	10
1	Trinômes du second degré	29
1.1	Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	29
1.1.1	Transformation de l'équation	29
1.1.2	Résolution de l'équation	29
1.2	Étude du signe de $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	30
1.3	Application à la recherche du domaine de définition d'une fonction	31
1.4	Remarques	33

1.5	Tableau récapitulatif	34
1.6	Exercices	34
2	Sens de variation. Dérivation	39
2.1	Introduction	39
2.2	Notions préliminaires	39
2.2.1	Coefficient directeur d'une droite	39
2.2.2	Fonctions monotones	39
2.3	Taux de variation	41
2.3.1	Définition	41
2.3.2	Interprétation graphique	41
2.4	Nombre dérivé et tangente	41
2.4.1	Nombre dérivé - Interprétation géométrique	41
2.4.2	Exemples	42
2.4.3	Équation de la tangente	43
2.5	La fonction dérivée	44
2.5.1	Définitions	44
2.5.2	Exemple	44
2.6	Les fonctions dérivées usuelles	44
2.6.1	Somme et produit de deux fonctions	44
2.6.2	Dérivées des fonctions usuelles	45
2.6.3	Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne	45
2.6.4	Exemples	46
2.7	Sens de dérivation d'une fonction	47
2.7.1	Fonction croissante sur un intervalle	47
2.7.2	Fonction décroissante sur un intervalle	48
2.7.3	Fonction constante sur un intervalle	48
2.7.4	Exemple	48
2.8	Point d'inflexion - Concavité	49
2.8.1	Fonction dérivée seconde	49
2.8.2	Position de la courbe et de la tangente	49
2.9	Exercices	53
3	Le logarithme et l'exponentielle	59
3.1	Le logarithme népérien	59
3.1.1	Présentation de la fonction	59
3.1.2	Logarithme d'une fonction	60
3.1.3	Logarithme décimal et applications	61
3.2	L'exponentielle	63
3.2.1	Présentation de la fonction	63
3.2.2	Formules fondamentales	64
3.2.3	Étude de la fonction exponentielle	64
3.2.4	Fonctions du type e^u	65
3.2.5	Fonctions exponentielles de base a	66
3.3	Exercices	67
4	Les fonctions économiques	71
4.1	Les fonctions coûts	71
4.1.1	Coût total de production	71
4.1.2	Coût marginal de production	72
4.1.3	Coût moyen de production	73
4.1.4	La recette et le bénéfice total	74
4.1.5	Exercice	75

4.2	Les fonctions d'offre et de demande	75
4.2.1	Définitions	75
4.2.2	La fonction élasticité	76
4.3	Exercices	77

Chapitre 4

Les fonctions économiques

4.1 Les fonctions coûts

4.1.1 Coût total de production

La production d'une quantité d'un certain produit entraîne dans les entreprises une série de dépenses telles que

- les salaires,
- les matières premières,
- les matières premières,
- les frais d'entretien,
- les frais généraux.

La somme de ces dépenses est appelée **coût total de production**.

Dans ce coût total interviennent

- **Les coûts variables** qui dépendent de la quantité produite : matières premières, achat de machines, embauche de personnel,...
- **les coûts fixes** qui ne dépendent pas de la quantité produite : location de locaux, publicités, assurances,...

Le coût total de production peut être modélisé par une fonction numérique définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pour tout réel q de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a donc

$$C_T(q) = C_V(q) + C_T(0)$$

où

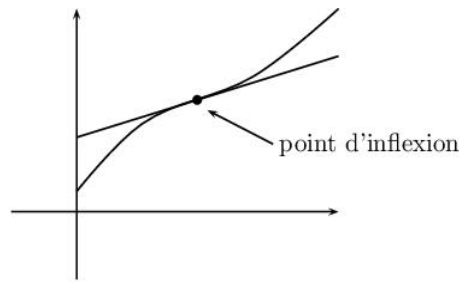
- . q désigne la quantité produite,
- . $C_V(q)$ correspond aux coûts variables de production,
- . $C_T(0)$ correspond aux coûts fixes (ils ne dépendent pas de q).

Exemple 4.1.1 Dans une imprimerie, l'impression et la reliure de livres entraîne des frais fixes de 650 € et 4,5 € de frais par livre fabriqué.

Soit q le nombre de livres fabriqués. Le coût total vaut alors :

$$C_T(q) = 4,5q + 650$$

La représentation graphique de la fonction coût total a en général l'allure ci-dessous : C_T est une fonction strictement croissante et strictement positive sur $[0; +\infty[$.



4.1.2 Coût marginal de production

Lorsque l'entreprise fabrique q unités, elle a besoin de savoir combien lui coûterait la production d'une unité supplémentaire. Le coût de production de cette $q + 1$ -ième unité lorsque l'entreprise en a déjà produit q est le coût marginal $C_{ma}(q)$.

Exemple 4.1.2 Le coût total de production d'une marchandise particulière est $C_T(q) = 150 + 200q - 0,01q^2$. Le coût total de production de 100 unités est de $C_T(100) = 20050$, celui d'une unité supplémentaire est de $C_T(101) = 20247,99$. Le coût marginal au rang 100 est de

$$C_{ma}(100) = C_T(101) - C_T(100) = 197,99,$$

c'est le coût de la 101-ième unité lorsque l'entreprise en a produit 100.

Les économistes considèrent que sous certaines conditions, la dérivée du coût total est une bonne approximation du coût marginal :

$$C_{ma}(q) = C'_T(q)$$

En effet, si on reprend l'exemple précédent,

$$C_{ma}(100) = C_T(101) - C_T(100) = \frac{C_T(101) - C_T(100)}{101 - 100} \simeq C'_T(100),$$

qui représente le taux de variation de la fonction C_T à l'abscisse 100. Comme $C_{ma}(q) = C'_T(q) = 200 - 0,02q$, on trouve $C_{ma}(100) = C'_T(100) = 198$.

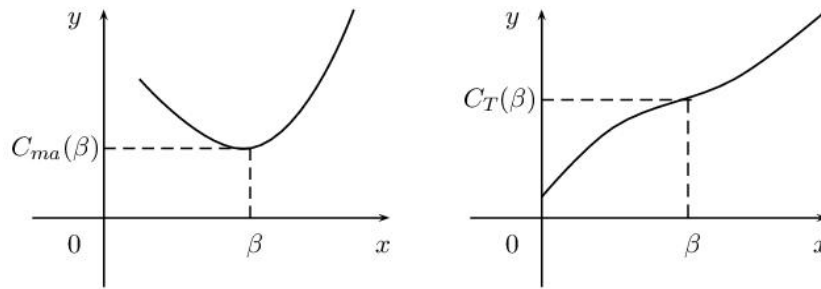
Pour des raisons économiques, le coût marginal qui est strictement positif

- décroît d'abord,
- atteint son minimum pour une production β ,
- puis augmente.

q	0	β	$+\infty$
signe $C''_T(q)$	-	\emptyset	+
variations $C'_T = C_{ma}$			
concavité C_T	concave		convexe

De plus, $(\beta, C_T(\beta))$ est un point d'inflexion. En effet, la dérivée seconde de C_T (ou la dérivée première de C_{ma}) s'annule en changeant de signe.

On a les graphes suivants :



4.1.3 Coût moyen de production

Définition

Pour q unités produites, le coût moyen de production est le quotient du coût total de production par le nombre d'unités produites. On peut alors définir sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction coût moyen de production notée C_M par

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

Exemple 4.1.3 Les coûts de production d'une entreprise exprimés en milliers d'€, se répartissent de la manière suivante :

- . les coûts fixes : 12
- . les coûts variables ou proportionnels : $3q^3 - 9q^2 + 18q$

Le coût moyen est alors

$$C_M(q) = \frac{3q^3 - 9q^2 + 18q + 12}{q} = 3q^2 - 9q + 18 + \frac{12}{q}.$$

Pour obtenir le coût moyen pour un certain nombre d'unités, il suffit de remplacer dans cette expression la valeur de q par celle correspondante. Par exemple, le coût moyen de production pour 10 unités vaut

$$C_M(10) = 3(10)^2 - 9(10) + 18 + \frac{12}{10} = \frac{2292}{10} \text{ soit } 229,2 \text{ €}.$$

Remarque 4.1.1 Le coût moyen et le coût marginal sont des coûts unitaires.

Sens de variation de C_M

La fonction coût total C_T est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc la fonction coût moyen C_M est dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour $q > 0$,

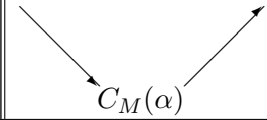
$$C'_M(q) = \left(\frac{C_T(q)}{q} \right)' = \frac{C'_T(q) \cdot q - C_T(q)}{q^2} = \frac{C'_T(q) - \frac{C_T(q)}{q}}{q} = \frac{C_{ma}(q) - C_M(q)}{q}.$$

Comme $q > 0$, déterminer le signe de $C'_M(q)$ (et donc les variations de C_M) revient à comparer $C_{ma}(q)$ et $C_M(q)$.

Or on sait pour des raisons de nature économique qu'il existe un seuil de production α (une abscisse représentant une certaine quantité) tel que :

- pour une production inférieure à α , le coût marginal de production est inférieur au coût moyen de production,
- pour une production égale à α , le coût marginal de production est égal au coût moyen de production,
- pour une production supérieure à α , le coût marginal de production est supérieur au coût moyen de production.

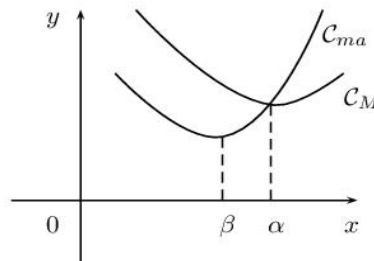
On en déduit le tableau de variations suivant :

q	0	α	$+\infty$
signe $C'_M(q)$	-	0	+
variations C_M			

Par conséquent,

$$C'_M(\alpha) = 0 \Leftrightarrow C_{ma}(\alpha) = C_M(\alpha).$$

Cela signifie que le coût marginal est égal au coût moyen lorsque le coût moyen est minimal.



4.1.4 La recette et le bénéfice total

Si l'entreprise vend une unité de produit p (en unités d'euros), la recette pour q unités est de

$$R(q) = pq$$

Le bénéfice réalisé est alors

$$B(q) = R(q) - C_T(q)$$

Exemple 4.1.4 Le coût total est donné en milliers d'euros par

$$C_T(q) = q^3 - 3q^2 + 10,48q.$$

L'entreprise vend le produit 11,8 milliers d'euros l'unité. Le bénéfice réalisé vaut alors

$$B(q) = R(q) - C_T(q) = 11,8q - (q^3 - 3q^2 + 10,48q) = -q^3 + 3q^2 + 1,32q.$$

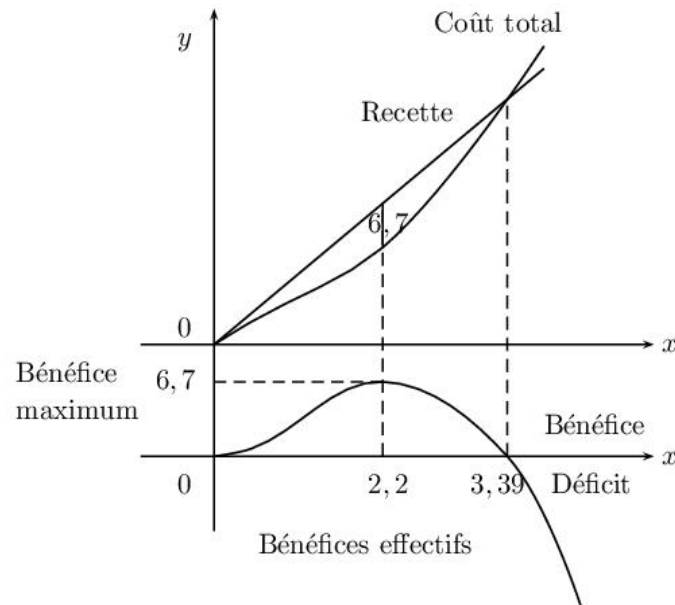
Il est essentiel de noter que

l'étude du signe de $B(q)$ permet de déterminer les productions pour lesquelles l'entreprise réalise des bénéfices

et que

l'étude des variations de la fonction B permet de trouver la production qui assure le bénéfice maximum

Toujours dans le cadre de l'exemple, on a les graphes ci-dessous :



4.1.5 Exercice

Un fabricant de pièces métalliques réalise une production annuelle de q unités pour un coût total de production C_T défini par

$$C_T(q) = q^3 - 12q^2 + 48q.$$

1. Déterminer le coût moyen.
2. Déterminer le coût marginal.
3. Déterminer le coût moyen minimal.
4. On suppose que le prix de vente unitaire est $p = 36$. Déterminer le bénéfice. Définir la production qui optimise le bénéfice.

4.2 Les fonctions d'offre et de demande

4.2.1 Définitions

Le vendeur est offreur alors que le consommateur est demandeur.

- La demande : la quantité d'un produit qu'un consommateur achètera est fonction du prix de ce produit. En général, la quantité demandée est d'autant plus grande que le prix du produit est plus bas. Cette demande est d'ailleurs fonction d'autres facteurs, par exemple, le revenu du consommateur.

On notera la demande $D(p)$,

D est une fonction décroissante du prix p

- L'offre : le vendeur qui cherche à maximiser son profit est d'autant plus disposé à vendre que le prix du produit est élevé. La quantité offerte, fonction du prix du produit, est donc d'autant plus grande que le prix du produit est plus élevé.

On notera $O(p)$ l'offre,

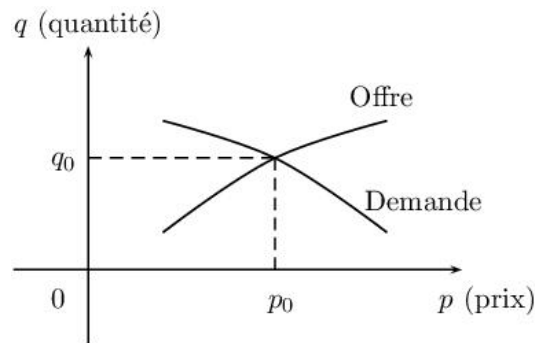
O est une fonction croissante du prix p

Le marché est le lieu de rencontre où les offres des vendeurs rencontrent les demandes des acheteurs qui s'ajustent à un certain prix.

Le prix d'équilibre est celui où les quantités offertes et demandées sont égales :

$$O(p) = D(p)$$

Graphiquement, on a où p_0 et q_0 sont le prix et la quantité d'équilibre sur le marché du produit.



Exemple 4.2.1 Les fonctions d'offre et de demande d'un bien B sont données par $O(p) = 2p$ et $D(p) = 35 - 3p$ où p est exprimé en euros.

L'équilibre est obtenu lorsque $O = D$. On pose donc

$$2p = 35 - 3p \Leftrightarrow p = 7.$$

Le prix d'équilibre est $p_0 = 7$ €, la quantité d'équilibre est $q_0 = D(p_0) = O(p_0) = 14$. Au prix de 7 €, 14 unités seront échangées.

4.2.2 La fonction élasticité

Définition 4.2.1 Lorsqu'une quantité passe de la valeur p_0 à la valeur p_1 , le taux d'accroissement de cette quantité est de $\frac{p_1 - p_0}{p_0}$ soit $\frac{p_1 - p_0}{p_0} \times 100$ en pourcentage. Ce taux est noté

$$\frac{\Delta p}{p}$$

Définition 4.2.2 Le coefficient d'élasticité e est le rapport du taux de variation de Q au taux de variation de P . On note

$$e[P](Q) = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$$

Interprétation du coefficient d'élasticité :

$$\text{si } P \text{ varie de } t\% \text{ alors } Q \text{ varie de } e[P](Q)t\%$$

- Lorsque $|e| > 1$, toute variation de P entraîne une variation plus que proportionnelle de Q ,

$$Q \text{ est très élastique à } P$$

- Lorsque $|e| < 1$, toute variation de P n'entraîne pratiquement pas de variation de Q ,

$$Q \text{ est faiblement élastique à } P$$

- Lorsque $|e| = 1$, toute variation de P entraîne une variation exactement proportionnelle de Q ,

$$Q \text{ est parfaitement élastique à } P$$

Exemple 4.2.2 La demande Q d'un bien en fonction du prix P de ce bien est donnée par :

Prix P	Quantité Q
5	30
4	40

L'élasticité-prix de la demande (ou élasticité de la demande par rapport au prix) lorsque P passe de 4 à 5 vaut

$$e[P](Q) = \frac{\frac{30-40}{40}}{\frac{5-4}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$$

donc lorsque P augmente de 25% ($\frac{5-4}{4} \times 100$), la quantité demandée diminue de 25%. On peut affirmer que Q est parfaitement élastique à P .

Définition 4.2.3 Si $y = f(x)$, pour un accroissement très petit, l'élasticité en un point $P(x, y)$ est donnée par

$$e[f](x) = \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

L'élasticité de f par rapport à x est donc approximativement la variation en pourcentage de f lorsque x augmente de 1%.

Exemple 4.2.3 La demande d'un produit varie en fonction du prix suivant la formule :

$$D(p) = -p^2 - 3p + 100$$

On a $D'(p) = -2p - 3$. L'élasticité-prix de la demande en $p = 3$ vaut

$$e[D](3) = \frac{3D'(3)}{D(3)} = \frac{3 \times (-9)}{82} \simeq -0,33$$

ce qui signifie que lorsque le prix est égal à 3 et qu'il augmente de 1%, la demande va baisser de 0,33%.

4.3 Exercices

Exercice 139 Pour commercialiser un produit, deux estimations de la demande ont été fournies par deux maisons de consultation :

- firme A : $D(p) = 100(20 - p)$

- firme B : $D(p) = 200(15 - p)$

où D est la demande et p le prix.

1. Représenter graphiquement les deux fonctions de demande. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des deux courbes.
2. Déterminer l'élasticité de la demande en fonction du prix suivant que l'on retient l'estimation de A ou de B.
3. Actuellement l'offre du produit est de $O = 1100$.
Dans chacun des deux cas, indiquer le prix d'équilibre du marché.
Calculer dans les deux cas l'élasticité de la demande en fonction du prix. Interpréter le résultat.
4. La quantité produite et demandée passe alors à 1150.
Déterminer le prix et la recette totale dans chacun des deux cas.

5. On choisit l'estimation de la firme A qui assure alors qu'avec une campagne publicitaire bien menée, on pourrait espérer une demande telle que $p = -0,01D + 25$.
 Quel est alors le prix d'équilibre ? ($O = 1100$). Donner l'élasticité de la demande.

Exercice 140

- Étudier et représenter la fonction qui au prix p fait correspondre la quantité demandée q définie par

$$p(q) = \frac{10}{1 + 5q}$$
- Exprimer la quantité demandée en fonction de p . Calculer l'élasticité $e(p)$ de la demande par rapport au prix.
 Étudier les variations de la fonction e pour p compris entre 0 et 10.
 Tracer la courbe représentative de e .
- Calculer le revenu global R en fonction de q . Étudier et représenter (sur le graphique de la question 1.) la fonction $R(q)$.
- Calculer le revenu marginal R' en fonction de q . Étudier et représenter (sur le graphique de la question 1.) la fonction $R'(q)$.

Exercice 141 Pour une catégorie de logements, la demande D pour un prix d'achat p et l'offre pour un prix de vente p s'expriment respectivement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} D(p) &= 50000 - 0,4p \\ O(p) &= -10000 + 0,2p \end{aligned}$$

D est le nombre de logements que souhaitent acquérir les ménages lorsque le prix est p . O est le nombre de logements qu'offrent à la vente les promoteurs lorsque le prix est p .

- Quelle est l'élasticité de la demande par rapport au prix pour $p = 100000$ € ?
- Quels prix de vente et d'achat s'établissent sur le marché ?
- Le gouvernement décide de donner une subvention à la construction des logements de 10000 € par logement. Quel nouveau prix s'établit sur le marché ?
- Si le prix d'achat d'un logement est de 100000 €, son loyer annuel de 10000 € et son prix de vente au bout d'un an de 90000 €, un ménage qui veut se loger un an et qui peut emprunter ou prêter de l'argent au taux de 10% a-t-il intérêt à acheter puis revendre le logement ou simplement être locataire ?

Exercice 142 Un club de football propose trois tarifs d'entrée au stade :

- Tarif A : sans abonnement, le spectateur paye 8 € par match.
- Tarif B : avec un abonnement à 40 €, le spectateur paye en plus 4 € par match.
- Tarif C : avec un abonnement à 120 € : entrée libre.

- Quel est le tarif le plus avantageux pour un spectateur assistant à :
 - 8 matchs ?
 - 14 matchs ?
 - 24 matchs ?
- On désigne par n le nombre de matchs auquel le spectateur désire assister dans l'année.
 - On note P_1 le prix payé pour n matchs au tarif A. Exprimer P_1 en fonction de n .
 - On note P_2 le prix payé pour n matchs au tarif B. Exprimer P_2 en fonction de n .
- Représenter graphiquement les droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations :

$$D_1 : y = 8x \quad ; \quad D_2 : y = 4x + 40 \quad ; \quad D_3 : y = 120.$$

- Déterminer graphiquement en répondant par une phrase :

- (a) le nombre maximal de matchs pour lequel le tarif A est le plus avantageux.
 (b) Les nombres minimal et maximal de matchs pour lesquels le tarif B est le plus avantageux.
 (c) Le nombre minimal de match pour lequel le tarif C est le plus avantageux.

Exercice 143 Pour diminuer les coûts de connexion à Internet, le responsable du service souhaite remplacer la ligne téléphonique classique par une ligne Numéris. Il souhaite en plus souscrire l'abonnement "avantage Numéris Internet" qui permet de bénéficier de 35% de réduction sur les coûts de connexion Internet de 8 heures à 22 heures du lundi au samedi.

	Ligne classique	Ligne Numéris Internet
Abonnement mensuel	12 €	36 €
Tarif horaire normal	2,5 €	2,5 €
Abonnement mensuel Avantage Numéris Internet		7 €
Taux de réduction sur le coût des communications		35%
Horaires et jours d'application de la réduction		De 8h à 22h du lundi au samedi

Tous les prix du tableau sont donnés toutes taxes comprises.

1. (a) Pour la ligne classique, le coût mensuel C_1 , en euros, des connexions à Internet en fonction du nombre mensuel d'heures de connexion n , est donné par la relation suivante :

$$C_1 = 2,5n + 12.$$

Calculer le coût mensuel de connexion à Internet pour cette ligne classique, pour un nombre mensuel d'heures de connexion égal à 30.

- (b) Montrer que le coût mensuel C_2 , en euros, des connexions à Internet durant les heures d'ouverture de l'entreprise, en utilisant la ligne Numéris Internet, en fonction du nombre mensuel d'heures de connexion n , est donné par la relation :

$$C_2 = 1,63n + 43.$$

2. On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 50]$, par :

$$f(x) = 2,5x + 12 \text{ et } g(x) = 1,63x + 43.$$

Tracer les représentations graphiques D' et D des fonctions f et g respectivement dans le plan rapporté au repère $(Ox; Oy)$.

- (a) Par une lecture graphique, indiquer quel semble être l'ensemble S des solutions de l'inéquation, d'inconnue x ,

$$f(x) \leq g(x).$$

- (b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation, d'inconnue x ,

$$2,5x + 12 \leq 1,63x + 43.$$

3. En tenant compte des résultats précédents, rédiger une phrase précisant le nombre d'heures de connexion à Internet à partir duquel l'utilisation d'une ligne Numéris est plus intéressante financièrement que l'utilisation d'une ligne classique.

Exercice 144 L'entreprise MAPUB est spécialisée dans la création et la production de gadgets publicitaires. Parmi ces produits, elle propose des stylos que d'autres sociétés peuvent faire personnaliser à leur nom pour les utiliser comme support publicitaire. Les contraintes de fabrication imposent une production comprise entre 400 et 1 200 unités.

1. On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[400; 1200]$ par :

$$f(x) = -0,002x^2 + 5x + 4000$$

(a) Compléter le tableau de valeurs.

x	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
$f(x)$	5680				6720	6880		7080	7120

(b) Représenter la fonction f graphiquement dans un repère orthonormé.

- On étudie la fonction g définie sur l'intervalle $[400; 1200]$ par : $g(x) = 4x + 3880$. Tracer la représentation graphique de la fonction g dans le même repère.
- Le coût de production varie en fonction du nombre n d'objets fabriqués. Ce coût de production est donné par la relation :

$$C(n) = -0,002n^2 + 5n + 4000.$$

Le prix de vente des objets (exprimé en euros) est donné par la relation :

$$P(n) = 4n + 3880.$$

À l'aide du graphique précédent, déterminer le nombre de stylos à partir duquel l'entreprise réalise des bénéfices. Justifier la réponse par une phrase.

- On appelle R le résultat de la vente de ces objets. Montrer que R peut s'écrire sous la forme :

$$R = 0,002n^2 - n - 120.$$

- Une société commande des objets personnalisés à son nom. Sur cette commande, l'entreprise MAPUB réalise un résultat positif (bénéfice) de 600 €. Calculer le nombre d'objets correspondant à cette commande.

Exercice 145

• Partie I

Actuellement, les tarifs de la société PHOTOCOP 2000, relatifs aux photocopies "noir et blanc", sont calculées par tranches, selon les conditions suivantes :

Nombre de photocopies	Coût unitaire TTC (en euros)
De la 1ère à la 5ème	0,13
De la 6ème à la 20ème	0,10
De la 21ème à la 50ème	0,06
Au-delà de la 50ème	Sur devis

- Montrer par le calcul que le coût TTC de 15 photocopies est 1,65 €.
- Calculer le coût TTC :
 - de 40 photocopies
 - de 45 photocopies
- Montrer que le coût TTC, en euros, pour un nombre n de photocopies compris entre 20 et 50, est donné par la relation

$$C(n) = 0,06n + 0,95.$$

- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[20; 50]$ par $f(x) = 0,06x + 0,95$. Tracer le segment de droite représentant graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[20; 50]$.
- Vérifier graphiquement les résultats obtenus à la question 2. Laisser apparents les traits de construction permettant une lecture graphique.

• Partie 2.

Dans le cadre d'une modification de la grille de tarification, seul le coût unitaire des photocopies comprises entre la 21-ième et la 50-ième changerait, de sorte que le coût de 40 photocopies ne soit plus que de 2,75 € (soit environ 18% de réduction par rapport à l'ancien tarif).

- Sur le graphique, placer le point $E(40; 2,75)$, puis tracer la droite (HE) avec $H(20; 2,15)$.

- Déterminer graphiquement ou par le calcul le coefficient directeur de cette droite.
- On admet que le coefficient directeur de la droite (HE) est le coût unitaire TTC, en euros, des photocopies comprises entre la 21-ième et la 50-ième. À quel pourcentage de réduction sur ce coût unitaire correspond la modification de tarification ?

Exercice 146 Une entreprise fabrique deux produits A et B dans les conditions suivantes :

- Produit A : Le coût total de production du produit A est donné par :

$$C_1(x) = 10x + 250,$$

x désignant le nombre d'articles fabriqués. Un article A étant vendu 25 €,

- exprimer en fonction de x le prix de vente $P_1(x)$ de ces x articles A ;
- vérifier que le bénéfice B_1 réalisé sur la vente de x articles A peut s'écrire :

$$B_1(x) = 15x - 250.$$

Représenter graphiquement B_1 dans un repère orthogonal pour x appartenant à $[20; 80]$ (échelle : sur Ox : 1 cm représente 5 articles ; sur Oy : 1 cm représente 50 €).

- Produit B : Le coût total de production du produit B est donné par :

$$C_2(x) = \frac{x^2}{2} + 15x + 10.$$

Un article B étant vendu 50 €,

- exprimer en fonction de x le prix de vente $P_2(x)$ de x articles B,
- vérifier que le bénéfice B_2 réalisé sur la vente de x articles B peut s'écrire :

$$B_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 35x - 10.$$

- Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et représenter graphiquement B_2 dans le repère précédent pour x appartenant à $[10; 60]$.

x	10	20	30	35	40	50	60
$B_2(x)$							

- Lire graphiquement la valeur du maximum

- Déterminer graphiquement et par le calcul le nombre d'articles à produire pour que les bénéfices B_1 et B_2 soient égaux. Quelle est alors la valeur de ce bénéfice ?

Exercice 147 Vous êtes chargé de préparer une opération commerciale concernant le prix d'un article dont le prix brut est de 1 000 € l'unité. Vous devez proposer au client une première remise de $t\%$ sur le prix brut, puis une seconde remise, de même pourcentage, sur le prix ainsi obtenu de sorte que le prix net de commercialisation de l'article soit de 902,50 €. L'objet du problème est de déterminer quelle est la valeur de t , s'il en existe une, qu'il convient de retenir sachant que :

- le prix net en euros, de commercialisation d'un article, exprimée à l'aide de t , est égal à :

$$1000 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$$

- pour des raisons commerciales : $t \leq 8$.

- Résolution d'une équation.

On considère la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $[0; 8]$ par :

$$f(x) = 1000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$$

- Compléter le tableau ci dessous. (valeurs prises par la fonction f).

x	0	2	4	6	8
$f(x)$			921,6	883,6	

- Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère $(Ox; Oy)$.

(c) Par une lecture graphique, en utilisant la courbe C :

– indiquer, si oui ou non, l'équation d'inconnue x ,

$$f(x) = 902,5$$

semble posséder une et une seule solution ;

– donner une estimation de cette solution si elle existe. (Laisser apparents les tracés ayant permis de répondre à cette question).

(d) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0; 8]$,

$$f(x) = 0,1x^2 - 20x + 1000.$$

(e) L'équation d'inconnue x :

$$0,1x^2 - 20x + 1000 = 902,5$$

est équivalente à l'équation d'inconnue x :

$$0,1x^2 - 20x + 97,5 = 0.$$

Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation d'inconnue x :

$$0,1x^2 - 20x + 97,5 = 0.$$

(f) Donner la valeur exacte de la solution de l'équation d'inconnue x ,

$$f(x) = 902,5.$$

(Justifier la réponse donnée).

2. Réponse au problème posé.

À l'aide des résultats trouvés précédemment, préciser le pourcentage $t\%$ de remise qu'il faut effectuer.